

ВМК



П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

# Численные методы решения задач со свободной границей

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА



*П. Н. ВАБИЩЕВИЧ*

Численные  
методы  
решения  
задач  
со свободной  
границей

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА 1987

**Вабищевич П. Н.** Численные методы решения задач со свободной границей. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.—164 с.

В монографии рассмотрены приближенные методы решения нелинейных краевых задач с неизвестной (свободной) границей. Классическим примером задач этого типа является проблема Стефана в теории теплопроводности. Приведены примеры задач со свободной границей в теплофизике, гидродинамике, теории упругости, физике плазмы. Рассмотрены основные вычислительные методы решения стационарных задач для эллиптических уравнений второго и четвертого порядка: методы последовательного уточнения неизвестной границы, преобразования областей, методы штрафа. Отдельно выделен класс обратных задач со свободной границей. Приведены примеры численного решения прикладных задач, иллюстрирующие возможности развиваемых методов.

Для специалистов по вычислительной математике и математическому моделированию, аспирантов и студентов старших курсов.

Библиогр. 255 назв. Ил. 44.

Рецензенты: профессор *Е. П. Жидков*,  
профессор *А. Г. Свешников*

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	5
ГЛАВА I. ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ . . . . .	9
§ 1. Примеры стационарных задач . . . . .	9
§ 2. Классификация задач со свободными границами . . . . .	24
§ 3. Другие задачи со свободной границей . . . . .	29
ГЛАВА II. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УТОЧНЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЫ . . . . .	35
§ 1. Итерационный метод для задач с нулевым дефектом . . . . .	35
§ 2. Метод аддитивного выделения особенности . . . . .	44
§ 3. Метод сглаживания в задачах со свободной границей . . . . .	48
§ 4. Пример 1. Численное решение квазистационарной осесим- метричной задачи Стефана . . . . .	52
ГЛАВА III. ПЕРЕХОД К НОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ . . . . .	59
§ 1. Одномерные задачи . . . . .	59
§ 2. Новые переменные в эллиптических задачах . . . . .	62
§ 3. Конкретные системы обращенных переменных . . . . .	66
§ 4. Задачи со свободной границей . . . . .	73
§ 5. Пример 2. Эволюция идеальной плазмы с поверхностным током . . . . .	75
ГЛАВА IV. РЕШЕНИЕ ОДНОФАЗНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИ- ЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА . . . . .	80
§ 1. Однофазные одномерные задачи . . . . .	80
§ 2. Методы релаксации при решении задач со свободной гра- ницей . . . . .	84
§ 3. Методы штрафа . . . . .	89
§ 4. Итерационные методы реализации метода штрафа . . . . .	92
§ 5. Решение задач в нерегулярных областях . . . . .	104
§ 6. Пример 3. Численное решение задачи фильтрации через дамбу . . . . .	108
ГЛАВА V. ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА . . . . .	112
§ 1. Одномерные задачи . . . . .	112
§ 2. Метод штрафа в двумерных задачах . . . . .	116
§ 3. Численное решение двумерной линейной задачи . . . . .	118
§ 4. Пример 4. Расчет однородных пластин с ограничениями . . . . .	125

ГЛАВА VI. НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРА- НИЦЕЙ . . . . .	131
§ 1. Метод интегральных уравнений . . . . .	131
§ 2. Метод обращения переменных при решении задачи Коши . . . . .	135
§ 3. Метод квазобрращения и его численная реализация . . . . .	139
§ 4. Нелокальное возмущение начальных условий . . . . .	145
§ 5. Пример 5. Определение границы плазменного шнура по данным магнитных измерений . . . . .	149
Литература . . . . .	154

## ВВЕДЕНИЕ

Современный уровень развития прикладной математики определяется исследованиями нелинейных задач для многомерных дифференциальных и интегральных уравнений. Новый практически важный класс нелинейных задач математической физики связан с так называемыми задачами со свободной границей. В этом случае граница области, в которой ищется решение (или ее часть), неизвестна и определяется в процессе самого решения. Классическим примером задач такого типа является задача Стефана — задача с фазовыми переходами в теории теплопроводности, имеющая почти столетнюю историю. В этом случае граница раздела фаз твердое тело — жидкость определяется заданной температурой плавления. Заметим также, что задача Стефана характеризуется разрывом теплового потока на неизвестной границе (выделяется скрытая теплота плавления).

Другой широко известный пример задачи со свободной границей — течение жидкости в канале с неровным дном и неизвестной границей раздела жидкость — атмосфера. Подчеркнем следующее обстоятельство, присущее большинству задач со свободной границей: мы имеем дело с нелинейными задачами, так как неизвестная граница определяется по неизвестному же решению и, наоборот, решение ищется в неизвестной заранее области. В ряде случаев можно выделить и линейные задачи (гл. VI), но не они определяют существо задач со свободной границей.

Задачи со свободной границей привлекают в настоящее время все большее внимание математиков — как специалистов по уравнениям с частными производными, так и специалистов по вычислительной математике. О возрастающем интересе к данной проблематике говорит и проведение ряда конференций, специально посвященных задачам со свободными границами за рубежом и у нас в стране. На этих форумах большое внимание уделяется развитию вычислительных методов решения задач со свободной границей.

Значительный прогресс в изучении задач со свободными границами связан с развитием теории вариационных неравенств. Многие задачи со свободной границей для эллиптических и параболических уравнений удается сформулировать в виде вариационного неравенства, вариационной задачи с огра-

нениями. Это позволяет с общих позиций исследовать вопросы существования и единственности решений этих задач, а также строить эффективные вычислительные алгоритмы.

Многие задачи со свободной границей не допускают вариационной формулировки. В частности, задачу о движении идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью не удастся сформулировать в виде вариационного неравенства. Для этих задач вопросы разрешимости чаще всего рассматриваются на основе методов теории функций комплексного переменного. Другой класс методов связан с применением классических методов возмущений, разложений по малым параметрам. Отдельно отметим класс методов с преобразованием исходной задачи, используя, например, новые переменные. Соответствующие ссылки на литературные источники приводятся по мере изложения основного материала.

Как и при решении других нелинейных задач, для приближенного решения задач со свободной границей применяются различные методы. Сюда относятся прежде всего конечно-разностные и вариационно-разностные методы. Метод граничных интегральных уравнений и его вычислительная реализация, известная под названием метода граничных элементов, в силу специфики задач со свободной границей применяется значительно реже.

Вариационные неравенства для эллиптических уравнений сводятся к минимизации того или иного функционала на множестве функций с ограничениями. Численные методы решения задач условной минимизации хорошо развиты, а их описание содержится во многих руководствах по математическому программированию и методам оптимизации.

Второй класс численных методов решения задач со свободной границей связан с преобразованием задачи. Вводятся новые переменные, с помощью которых неизвестная область отображается в известную. Классический пример такого преобразования — преобразование годографа в гидродинамике. В методах указанного класса основной упор делается на отыскании такой замены переменных и на численное решение полученной нелинейной задачи.

Данная работа посвящена описанию основных вычислительных методов при решении задач со свободной границей для эллиптических уравнений второго и четвертого порядка. На их основе могут быть рассмотрены аналогичные задачи для параболических уравнений. Основное внимание уделяется двумерным задачам. Одномерные примеры используются для пояснения используемых подходов. Решение конкретных задач со свободной границей иллюстрирует возможности рассматриваемых вычислительных методов.

В работе последовательно применяются конечно-разностные методы на регулярных сетках. Использование нерегулярных сеток, а равно и метода конечных элементов в задачах с неизвестной границей наиболее эффективно при условии, что расчетная сетка или конечные элементы адаптируются (подстраиваются) под свободную границу. Такой класс численных методов в настоящее время плодотворно развивается, и, надо думать, возможности таких методов далеко не исчерпаны.

Коротко остановимся на содержании работы. В главе I, носящей обзорный характер, приведены постановки наиболее характерных задач со свободными границами, взятыми из различных областей физики: теплопередачи, гидродинамики, теории упругости, физики плазмы и др. Дается условная классификация задач со свободными границами для эллиптических уравнений. Приведенная классификация задач никак не претендует на полноту, а лишь отражает особенности той или иной задачи со свободной границей.

Глава II посвящена описанию простейшего класса приближенных методов последовательного уточнения неизвестной границы для двухфазных задач. Такие методы достаточно «прозрачны» и легко реализуемы. Рассмотрены вопросы аппроксимации неоднородных условий сопряжений в двумерных задачах, описаны основные варианты методов сквозного счета.

В главе III рассмотрено преобразование переменных в задачах со свободной границей. При изложении этих вопросов автор следовал работам по расчетам МГД-равновесия плазмы в тороидальных системах, выполненным совместно с сотрудниками ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР.

В главе IV рассматривается применение методов штрафа для численного решения задач со свободной границей. Вычислительный алгоритм строится на основе решения соответствующего нелинейного уравнения Эйлера. Приведены основные модификации итерационных методов, используемых при таком подходе.

В главе V рассматривается простейшая задача с ограничениями для эллиптического уравнения четвертого порядка. Вычислительный алгоритм снова строится на основе метода штрафа. При решении задач в нерегулярных областях применяется метод фиктивных областей.

В главу VI выделен класс некорректных задач со свободной границей. Они сводятся к решению задачи Коши для эллиптического уравнения, задачи продолжения решений эллиптических краевых задач. Рассмотренные вычислительные методы построены на основе обращения переменных, использования нового варианта метода квазиобращения с применением разностных методов.

Список приведенной литературы не претендует на полноту. В то же время он позволяет составить достаточно полное представление о задачах со свободной границей и методах решения таких задач. Численные примеры носят иллюстративный характер, их выбор отражает в определенной степени личные интересы автора.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность Т. Н. Вабищевич, С. А. Васенко, Л. М. Дегтяреву, В. В. Дроздову, И. В. Зотову, Ю. Ю. Пошехонову и А. П. Фаворскому, совместные работы с которыми легли в основу данной работы. Особенно признателен автор А. А. Самарскому за постоянную поддержку и внимание к работе.

# ГЛАВА I

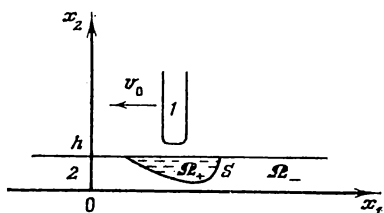
## ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

### § 1. ПРИМЕРЫ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

#### 1.1. Квазистационарная задача Стефана

Рассмотрим классическую задачу Стефана со свободной границей. При этом ограничимся постановкой так называемой квазистационарной задачи Стефана. Предположим, что рассматривается тепловой процесс в неограниченной области  $\Omega$ , причем граница расплавленной зоны  $S$ , где температура равна температуре плавления  $u^*$ , либо неподвижна, либо движется с постоянной скоростью  $v_0$ . В качестве примера более конкретно рассмотрим задачу сварки (рис. 1). Над бесконечной плоской

Рис. 1. Расплавление пластины под влиянием движущегося источника тепла: 1 — источник тепла, 2 — пластина,  $h$  — ее толщина,  $S$  — граница расплава,  $\Omega_+$  — область расплава,  $\Omega_-$  — нерасплавленная часть пластины



пластиной толщины  $h$  движется со скоростью  $v_0$  источник тепла, мощности которого достаточно, чтобы проплавить часть пластины. Положим, для определенности, что в области  $\Omega_+$  температура  $u(x)$  больше температуры плавления  $u^*$ , а в оставшейся части пластины  $\Omega_-$  —  $u(x) < u^*$ .

В системе координат, движущейся с источником тепла, граница фазового перехода  $S$  неподвижна. Такую задачу с фазовым переходом принято называть квазистационарной задачей со свободной границей. Обозначим через  $c(u)$ ,  $\rho(u)$  и  $k(u)$  коэффициент теплоемкости, плотность и коэффициент теплопроводности пластины соответственно. Заметим, что при  $u = u^*$  функции  $c(u)$ ,  $\rho(u)$  и  $k(u)$  могут быть разрывными.

Уравнение теплопроводности в данной задаче имеет вид

$$\rho(u) c(u) (v_0 \nabla) u = \nabla (k(u) \nabla u), \quad x \in \Omega. \quad (1.1)$$

На границах области  $\Omega$  задаются соответствующие граничные

условия. Например, на верхней границе пластины задан тепловой поток

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial N} = Q(x), \quad x_2 = h, \quad (1.2)$$

где  $N$  — внешняя нормаль. Предположим, что на нижней части пластины температура  $u(x)$  поддерживается постоянной и равной  $u_0$ :

$$u(x) = u_0, \quad x_2 = 0. \quad (1.3)$$

На границе раздела фаз  $S$  температура непрерывна:

$$[u] \equiv u_+(x) - u_-(x) = 0, \quad x \in S, \quad (1.4)$$

где  $u_{\pm}(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S \\ x' \in \Omega_{\pm}}} u(x')$ .

Характерной особенностью задачи Стефана является разрыв теплового потока на границе раздела фаз:

$$\left[ k(u) \frac{\partial u}{\partial N} \right] = \lambda(v_0 N), \quad x \in S, \quad (1.5)$$

где  $\lambda$  — энтальпия (скрытая теплота) фазового перехода. Условия (1.1)–(1.5) определяют квазистационарную задачу Стефана.

При рассмотрении имеющейся литературы по задаче Стефана сделаем несколько замечаний. Вопросы существования и единственности решения задачи Стефана в нестационарной постановке (классическая задача Стефана) рассматривались во многих работах. В одномерной по пространству постановке результаты этих исследований отображены в книгах [1–3], а из более поздних работ отметим [4–7]. Квазистационарная задача Стефана рассматривалась, например, в работах [8, 9]. Численные методы решения задач типа задачи Стефана очень разнообразны, особенно для одномерных задач. Для решения многомерных задач широкое распространение получили методы сквозного счета. Из наиболее ранних исследований в этом направлении отметим работы [10, 11], а из многочисленных более поздних — работы [12–14]. Метод прямых в задачах типа задачи Стефана рассматривается в [15, 16], схемы с выпрямлением фронта построены в работах [17, 18] и в ряде других. Подвижные нерегулярные сетки использовались в работе [19]. В последнее время отмечается тенденция применения подстраивающихся конечных элементов [20, 21]. Следует заметить, что библиография по задаче Стефана гораздо обширнее. Те немногочисленные работы, которые здесь упомянуты, лишь отчасти отражают прогресс в изучении задач рассматриваемо-

го класса. В своем большинстве они посвящены нестационарным задачам. В данной работе основным объектом являются задачи со свободной границей для эллиптических уравнений.

Квазистационарная задача Стефана (1.1)–(1.5) наряду с тепловыми процессами сварки [22] описывает и другие процессы расплава и затвердевания [23]. Например, большое значение для получения больших кристаллов хорошего качества имеет зонная плавка [24, 25]. На рис. 2 отмечена характерная технологическая схема вертикальной зонной плавки цилиндрического стержня. Вблизи тепловыделяющего элемента протягивается с постоянной скоростью  $v_0$  цилиндрический стержень, благодаря чему образуется зона расплава. При затвердевании формируется кристалл с более высокими характеристиками.

Заметим также, что в данной задаче зонной плавки можно вы-

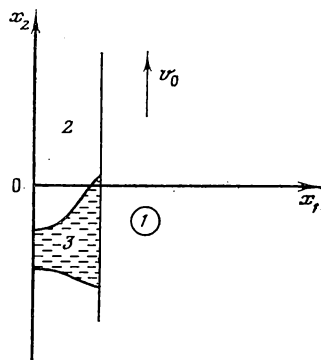


Рис. 2. Схема зонной плавки: 1 — тепловыделяющий элемент, 2 — цилиндрический стержень, 3 — зона расплава

делить еще одну задачу со свободной границей. Расплавленная зона удерживается не твердыми стенками, которые загрязняли бы расплав, а силами поверхностного натяжения, дополненными, например, магнитным полем, возникающим при пропускании электрического тока по стержню [26].

Третий пример квазистационарной задачи Стефана возьмем из металлургии. Наиболее совершенная технология приготовления качественных стальных слитков связана с непрерывной разливкой стали [27, 28]. Принципиальная схема машины непрерывного литья отображена на рис. 3. Стальной слиток 1 вытягивается из кристаллизатора 2. Поверхность слитка интенсивно охлаждается как в самом кристаллизаторе, так и в зоне вторичного охлаждения 3. Математическая модель может быть как двумерной по пространству (цилиндрически симметричный слиток), так и трехмерной (разливка стальных слитков прямоугольного сечения). При математическом описании непрерывной разливки стали укажем на интересную возможность применения параболического приближения [29], которое приводит к классической нестационарной задаче Стефана.

## 1.2. Задачи идеальной гидродинамики со свободными границами

Едва ли не самый обширный класс задач со свободными границами появляется при исследовании динамики жидкостей с границами раздела жидкость—атмосфера, жидкость—жидкость. Рассмотрим простейшие задачи для идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами. Остановимся на двумерном (плоском) течении ее в канале с неровным дном (рис. 4).

Уравнения идеальной несжимаемой жидкости (уравнения Эйлера) имеют вид

$$(\nabla u) = 0, \quad (1.6)$$

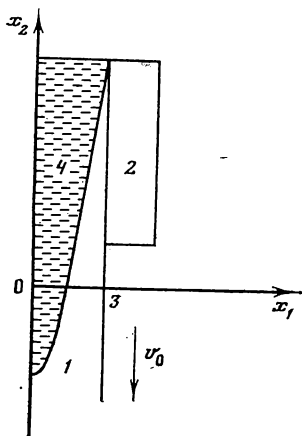


Рис. 3. Упрощенная схема непрерывной разливки стали: 1 — слиток, 2 — кристаллизатор, 3 — вторичная зона охлаждения, 4 — расплавленная сталь

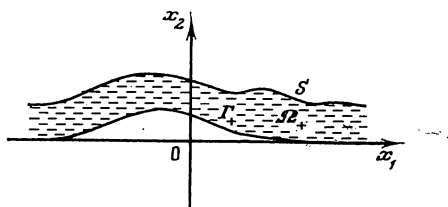


Рис. 4. Течение в плоском канале с неровным дном:  $\Omega_+$  — область течения,  $\Gamma_+$  — граница твердого дна,  $S$  — свободная граница

$$(u \nabla) u = -\nabla p, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_+. \quad (1.7)$$

Здесь  $u = (u_1, u_2)$  — скорость,  $p$  — давление. Вводя функцию тока  $\psi$  соотношениями

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (1.8)$$

удовлетворим условию несжимаемости (1.6). Обозначим через  $\omega$  вихрь скорости, который определяется выражением

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (1.9)$$

Очевидно, из (1.8) и (1.9) следует

$$\Delta \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -\omega, \quad x \in \Omega_+. \quad (1.10)$$

Запишем (1.7) в покомпонентном виде:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (1.11)$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = - \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad x \in \Omega_+. \quad (1.12)$$

Дифференцируя (1.11) по  $x_2$ , (1.12) по  $x_1$  и вычитая их друг из друга, получим

$$\frac{D(\psi, \omega)}{D(x_1, x_2)} = 0, \quad (1.13)$$

где

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \equiv \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$

якобиан. Из (1.13) следует, что  $\psi$  и  $\omega$  связаны функциональной зависимостью

$$\omega = \omega(\psi). \quad (1.14)$$

Подстановка (1.14) в (1.10) дает следующее нелинейное уравнение Пуассона для функции тока  $\psi$  в области течения  $\Omega_+$ :

$$\Delta \psi = -\omega(\psi), \quad x \in \Omega_+, \quad (1.15)$$

с некоторой заданной правой частью  $\omega(\psi)$ .

В простейшем случае безвихревого потенциального течения  $\omega(\psi) = 0$ , а

$$\Delta \psi = 0, \quad x \in \Omega_+. \quad (1.16)$$

Рассмотрим теперь граничные условия для уравнений (1.15) и (1.16). Предположим, что на входе и выходе канала, высота которого равна  $h$ , дно ровное, а скорость жидкости постоянна и задана. В этом случае

$$u(x) = u_0, \quad x_1 = \pm \infty, \quad x_2 \in (0, h). \quad (1.17)$$

Из (1.8) и (1.17) следует, что

$$\psi(x) = u_0 x_2 + \text{const}, \quad x_1 = \pm \infty, \quad x_2 \in (0, h)$$

и, например,

$$\psi(x) = u_0 x_2, \quad x_1 = \pm \infty, \quad x_2 \in (0, h). \quad (1.18)$$

Если дно  $\Gamma_+$  твердое, ставятся условия непроницаемости

$$(uN) = 0, \quad x \in \Gamma_+,$$

которые с учетом (1.8) дают  $\partial \psi / \partial \tau = 0$ ,  $x \in \Gamma_+$ , где  $\partial / \partial \tau$  — про-

изводная по касательной к  $\Gamma_+$ . Принимая во внимание (1.18), получим

$$\psi(x) = 0, \quad x \in \Gamma_+. \quad (1.19)$$

Осталось рассмотреть условия на неизвестной границе  $S$ . Условие непротекания дает

$$\psi(x) = u_0 h, \quad x \in S. \quad (1.20)$$

Кроме того, на  $S$ , как на линии тока, постоянное значение имеет интеграл Бернули. Обозначим через  $p_0$  атмосферное давление и получим

$$p_0 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \rho g x_2 = p_0 + \frac{1}{2}u_0^2 + \rho g h, \quad (1.21)$$

где  $\rho$  — плотность, а  $g$  — ускорение свободного падения. Из (1.20) и (1.21) следует условие

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial N}\right)^2 = |\nabla \psi|^2 = u_0^2 + 2\rho g(h - x_2), \quad x \in S, \quad (1.22)$$

где, как и ранее,  $N$  — нормаль к  $S$ .

В итоге приходим к задаче со свободной границей (1.16), (1.18)–(1.20), (1.22).

Аналогично ставится задача об истечении струй идеальной жидкости, широко представленная в литературе (см., например, [30]). Схема струйного течения жидкости в частном случае изображена на рис. 5.

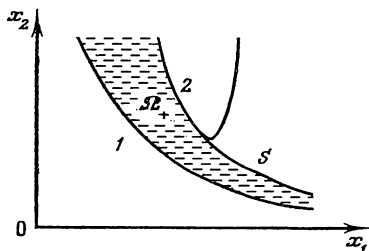


Рис. 5. Схема струйного течения жидкости: 1, 2 — твердые стенки,  $S$  — свободная поверхность,  $\Omega_+$  — область течения

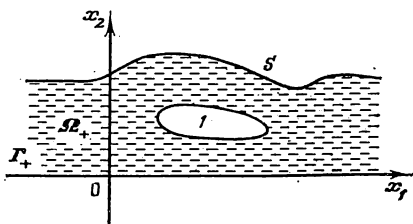


Рис. 6. Схема обтекания подводного крыла:  $I$  — подводное тело,  $\Omega_+$  — область, занятая жидкостью,  $\Gamma_+$  — твердое дно,  $S$  — свободная поверхность

Задача со свободной границей возникает также при учете движения подводного объекта. Например, на рис. 6 представлена картина обтекания подводного крыла равномерным пото-

ком в канале с плоским дном. Наконец, отметим задачи обтекания препятствий, надводных сооружений (рис. 7).

Мы указали здесь лишь на некоторые плоские задачи идеальной гидродинамики. Аналогично ставятся и более сложные задачи, например, для осесимметричных течений со свободными границами, потенциальные пространственные задачи и т. д.

Изучению задач идеальной гидродинамики со свободными границами посвящены многие работы. Эти исследования в основном примыкают к классическим задачам теории струй. Фундаментальные результаты в этом направлении изложены в монографиях [30, 31], более поздние исследования в задачах идеальной гидродинамики со свободными границами отражены

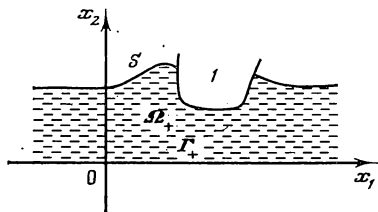


Рис. 7. Обтекание плавающего тела

в обзорах [32, 33]. Вопросы однозначной разрешимости большого класса задач обсуждаются в книге [34]. Отметим отдельно результаты, полученные для уравнений Навье—Стокса вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами [35—37].

Численные методы решения задач со свободными границами в гидродинамике не получили пока достаточного развития. В работах [38, 39] при конечно-разностном решении задач идеальной гидродинамики используется идея преобразования переменных. Аналогичные подходы развиваются в [40—43]. Ряд методов (см., например [44]) относятся к классу численно-аналитических. Основные результаты в вычислительной гидродинамике [45, 46] получены при использовании метода частиц в ячейке и его модификаций. Вопросам численного решения задач со свободными границами для течений вязкой несжимаемой жидкости посвящены работы [47, 48].

### 1.3. Задачи стационарной фильтрации

Интересный класс задач возникает при рассмотрении течений в пористых средах. Скорость фильтрации  $u$  отлична от нуля лишь при условии, что имеется разность давлений (напор, внешние силы). Пусть  $p$  — давление,  $\rho g x_2$  — гидростатическое давление, где  $\rho$  — плотность, а  $g$  — ускорение свободного падения. Полное давление обозначим через  $P$ , так что

$$P = p + \rho g x_2.$$

Фильтрация описывается законом Дарси:

$$\mathbf{u} = -k \nabla (p + \rho g x_2), \quad (1.23)$$

где  $k$  — коэффициент фильтрации, вообще говоря нелинейный. Жидкость предполагается несжимаемой, поэтому уравнение неразрывности имеет вид

$$(\nabla \mathbf{u}) = 0. \quad (1.24)$$

Из (1.23) и (1.24) при постоянном коэффициенте фильтрации  $k$  вытекает следующее уравнение для давления:

$$\Delta p = 0. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) является основным при изучении процессов фильтрации.

Рассмотрим постановку задачи о фильтрации жидкости через дамбу (рис. 8). Пренебрегая атмосферным давлением,

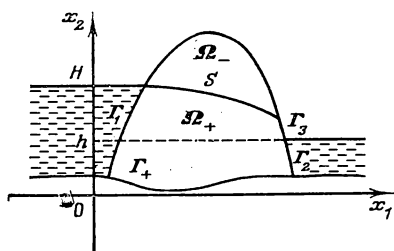


Рис. 8. Фильтрация жидкости через дамбу:  $\Omega_+$  — смоченная часть,  $\Omega_-$  — несмоченная часть,  $\Gamma_+$  — непроницаемое основание,  $H$  и  $h$  — уровни жидкости до и после дамбы соответственно

положим  $p=0$  в воздухе. На твердом основании  $\Gamma_+$  условие непротекания  $(\mathbf{u}\mathbf{N})=0$  с учетом (1.23) дает

$$\frac{\partial}{\partial N} (p + \rho g x_2) = 0, \quad x \in \Gamma_+. \quad (1.26)$$

В жидкости до и после дамбы можно пренебречь скоростью фильтрации и приравнять полное давление гидростатическому. Поэтому на участке границы дамбы  $\Gamma_1$  имеем

$$p + \rho g x_2 = \rho g H, \quad x \in \Gamma_1, \quad (1.27)$$

принимая во внимание то, что  $p=0$  при  $x_2=H$ . Аналогично

$$p + \rho g x_2 = \rho g h, \quad x \in \Gamma_2. \quad (1.28)$$

На  $\Gamma_3$  давление равно атмосферному и в силу наших предположений

$$p(x) = 0, \quad x \in \Gamma_3. \quad (1.29)$$

Осталось сформулировать условия на неизвестной границе смачивания  $S$ . Очевидно, что

$$p(x)=0, \quad x \in S. \quad (1.30)$$

Из условий непротекания следует второе условие на  $S$ :

$$\frac{\partial}{\partial N}(p + \rho g x_2) = 0, \quad x \in S. \quad (1.31)$$

Таким образом, приходим к задаче со свободной границей (1.25) — (1.31).

Рассмотрим пример задачи фильтрации с нелинейным законом Дарси. Это класс задач с так называемым предельным градиентом. Пусть в (1.23)

$$k = k(x, |\nabla P|),$$

причем фильтрация наступает ( $u \neq 0$ ) при достаточно большом градиенте давления. Это означает, что существует  $|\nabla P|_0$  такое, что

$$k(x, |\nabla P|) = \begin{cases} 0, & |\nabla P| < |\nabla P|_0, \\ > 0, & |\nabla P| \geq |\nabla P|_0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Подстановка (1.32) в (1.23) и (1.24) дает для определения давления вырождающееся эллиптическое уравнение

$$\nabla(k(x; |\nabla P|) \nabla P) = 0. \quad (1.33)$$

Уравнение (1.33) дополняется некоторыми граничными условиями. Например, на границе области фильтрации  $\Omega$

$$P(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.34)$$

В задаче (1.33), (1.34) область  $\Omega$  разбивается на две: застойную зону (зоны)  $\Omega_-$ , где  $u(x) = 0$ , и зону фильтрации  $\Omega_+$ , где  $u(x) \neq 0$ . Границы застойных зон неизвестны и составляют предмет исследования.

Задачи фильтрации, в том числе и задачи со свободными границами, широко представлены в литературе: Отметим прежде всего монографию [49] и приведенную в ней библиографию. Математические вопросы однозначной разрешимости задач такого типа исследуются в работах [34, 50]. В интересной работе [51] указано преобразование, сводящее задачу (1.25) — (1.31) к вариационному неравенству [52, 53]. Это важно не только с теоретической точки зрения, но и с точки зрения построения конкретных вычислительных алгоритмов ее приближенного решения. Численные методы решения задач фильтра-

ции со свободными границами рассматриваются в работах [54—56]. Задачи фильтрации с предельным градиентом обсуждаются в книгах [57, 58]. Обзор численных методов решения этого класса задач можно найти в [59].

#### 1.4. Равновесие тонких пластин и мембран с ограничениями

Рассмотрим тонкий однородный цилиндр высотой  $h$  с поперечным сечением  $\Omega$ . Выберем оси координат так, чтобы плоскость  $x_3=0$  была серединной. Пусть эта пластина подвергается действию поперечной (по нормали к серединной плоскости) нагрузки, причем сами деформации будем считать малыми. Обозначим через  $u(x)$  ( $x=(x_1, x_2)$ ) поперечное смещение пластины в точке  $x \in \Omega$ . Функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению Софи Жермен

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = \frac{q(x)}{D}. \quad (1.35)$$

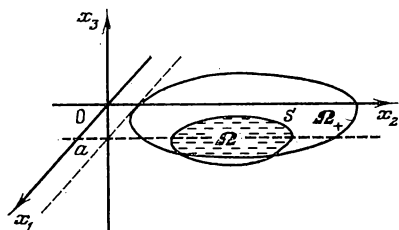
Здесь  $q(x)$  — распределенная поперечная нагрузка,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  — цилиндрическая жесткость пластины, где  $E$  — модуль Юнга материала пластины, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона ( $0 \leq \nu \leq 1/2$ ).

Уравнение (1.35) дополняется краевыми условиями на  $\partial\Omega$ , соответствующими условиям заделки края пластины. В простейшем случае жестко защемленных краев приходим к условиям Дирихле [60]

$$u(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.36)$$

Предположим теперь, что пластина находится над жесткой преградой, граница которой дается уравнением  $x_3 = a$  ( $a < 0$ ). Тогда на решение задачи необходимо наложить естественное ограничение

$$u(x) \geq a, \quad x \in \Omega, \quad (1.37)$$



которое соответствует тому, что прогиб пластины не может быть больше  $|a|$  (рис. 9).

Рис. 9. Прогиб тонкой пластины с поперечным сечением  $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ,  $\Omega_-$  — область контакта пластины с жестким препятствием,  $S$  — ее граница

Задачу с ограничениями (1.35)—(1.37) можно рассматривать как задачу со свободной границей. Действительно, обозначим через  $\Omega_-$  область контакта, а через  $S$  — неизвестную границу контакта пластины с жестким препятствием. Тогда в  $\Omega_-$  справедливо

$$u(x) = a, \quad x \in \Omega_-, \quad (1.38)$$

а в области  $\Omega_+$  ( $\Omega = \Omega_+ + \Omega_-$ ), где  $u(x) > a$ , — уравнение (1.35). На неизвестной границе помимо условия  $u(x) = a$  ставятся следующие однородные условия сопряжения:

$$[u] = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial N} \right] = 0, \quad [\Delta u] = 0, \quad x \in S. \quad (1.39)$$

Аналогичная задача возникает и при рассмотрении прогибов мембраны, стесненной ограничениями. Мембрана представляет собой тонкую пластину, подверженную сильному растяжению, приложенному к ее краям. Обозначим через  $T$  абсолютную величину растягивающей силы, отнесенной к единице длины края мембраны. Тогда уравнение для прогиба мембраны  $u(x)$  имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{T} q(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.40)$$

Вместо двух условий типа (1.36) для пластины берется одно:

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.41)$$

При ограничениях типа (1.37) соответствующая задача со свободной границей ставится аналогично задаче (1.35)—(1.39).

Задачи с ограничениями для мембран и пластин подробно исследуются в работах [52, 61]. Численные методы решения такого класса задач обсуждаются в [62] при использовании эквивалентной вариационной формулировки задачи. Некоторые разностные алгоритмы описаны в книге [63]. Следует заметить, что и в этой работе рассматриваемый класс задач исследуется как задачи условной минимизации. В работе [64] для численного решения задач с ограничениями в теории пластин применяется метод, построенный на решении краевой задачи для нелинейного уравнения Эйлера при реализации метода штрафа. Для задач расчета мембран такой подход используется в [65, 66]. Схемы метода конечных элементов обсуждаются, например, в [62, 67], где можно найти и соответствующую библиографию. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для более сложных задач, например для оболочек и пластин, подверженных большим нагрузкам [68, 69].

### 1.5. Упругопластическое кручение цилиндрических стержней

Задачи теории упругости очень часто сводятся к задачам со свободными границами. Это могут быть контактные задачи, пример которых рассмотрен выше. Другой тип задач со свободными границами в теории упругости характеризуется описанием твердых тел из материалов с нелинейными уравнениями состояния. Примером задачи такого класса может служить проблема упругопластического кручения цилиндрических стержней.

Рассмотрим однородный цилиндрический стержень с поперечным сечением  $\Omega$ , который подвергается равномерному кручению. Предположим, что ось  $x_3$  направлена вдоль оси стержня, а  $\alpha = \partial \varphi / \partial x_3$  — угол закрутки на единицу длины стержня. Для компонент тензора напряжений в этих условиях справедливы представления [60]

$$\begin{aligned} \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = 0, \\ \tau_{13} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \tau_{23} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где  $u = u(x)$  ( $x = (x_1, x_2)$ ) — функция напряжений.

В области упругих деформаций справедливо уравнение

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} = -2G\alpha, \quad x \in \Omega_+, \quad (1.43)$$

где  $G$  — модуль сдвига материала стержня.

В пластической области  $\Omega_-$  выполнено условие пластичности

$$\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 = k^2, \quad x \in \Omega_-, \quad (1.44)$$

где  $k$  — константа пластичности.

Из (1.42), (1.43) получим уравнение для  $u(x)$  в упругой области:

$$\Delta u = -2G\alpha, \quad x \in \Omega_+. \quad (1.45)$$

Аналогично из (1.42), (1.44) вытекает

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 = k^2, \quad x \in \Omega_-, \quad (1.46)$$

в области пластичности.

На границе односвязного сечения стержня  $\Omega$  можно положить

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.47)$$

Постановка граничных условий для многосвязной области  $\Omega$  рассматривается в [60].

Таким образом, приходим к следующей задаче со свободной границей. Неизвестная граница  $S$  делит область  $\Omega$  на две:  $\Omega_+$  — область упругих деформаций и  $\Omega_-$  — область пластических деформаций. В  $\Omega_+$ , которая определяется условием  $|\nabla u|^2 < k^2$ , справедливо уравнение (1.45), а в  $\Omega_-$  — уравнение (1.46). На самой свободной границе  $S$  справедливы однородные условия сопряжения

$$[u] = 0, \left[ \frac{\partial u}{\partial N} \right] = 0, \quad x \in S. \quad (1.48)$$

Задача (1.45) — (1.48) рассматривается в работах [52, 62]. Отметим также исследования [70, 71], специально посвященные этой задаче. Численные методы решения таких задач описываются в [70, 72]. Аналогично ставятся и многие другие задачи упругости и пластичности, в частности для упругопластических пластин.

### 1.6. Задачи магнитогидродинамического равновесия плазмы в тороидальных системах

При математическом моделировании поведения высокотемпературной плазмы в установках, предназначенных для ее длительного удержания с целью достижения условий зажигания термоядерной реакции, большое значение имеет задача магнитогидродинамического (МГД) равновесия. Отметим некоторые задачи МГД-равновесия, которые будут рассматриваться нами как задачи со свободными граница-

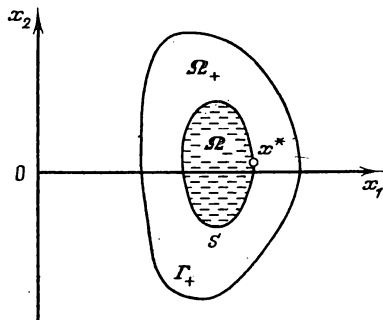


Рис. 10. Равновесие тороидального плазменного шнура:  $\Gamma_+$  — идеально проводящий кожух,  $\Omega_+$  — вакуум,  $\Omega_-$  — область плазмы,  $S$  — граница плазменного шнура,  $x^*$  — точка касания

ми. Остановимся на простейшей модели равновесия плазменного шнура внутри идеально проводящего кожуха. Принципиальная схема такой системы удержания изображена на рис. 10.

В рамках одножидкостной магнитной гидродинамики равновесие в плазме описывается следующим уравнением Греда—Шафранова [73, 74]:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1 f_1(u) - \frac{1}{x_1} f_2(u), \quad x \in \Omega_-, \quad (1.49)$$

с некоторыми заданными функциями  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$ . В области  $\Omega_+$  выполнено однородное уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega_+. \quad (1.50)$$

На границе плазма—вакуум  $S$  ставится условие

$$u(x) = u^* = \text{const}, \quad x \in S. \quad (1.51)$$

Заметим, что значение  $u^*$ , вообще говоря, неизвестно. Во многих конкретных ситуациях можно положить

$$u^* = u(x^*), \quad (1.52)$$

где  $x^*$  — некоторая внутренняя точка  $\Omega$ . Условия (1.52) соответствует касанию плазменного шнура  $\Omega_-$  точки  $x^*$ .

В предположении отсутствия поверхностных токов на  $S$  выполнены однородные условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial N} \right] = 0, \quad x \in S. \quad (1.53)$$

В противном случае на  $S$  задается скачок нормальных производных.

И наконец, на идеально проводящем кожухе  $\Gamma_+$  можно положить

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_+. \quad (1.54)$$

Аналогично (1.49)—(1.54) ставятся задачи равновесия во внешних магнитных полях. Особенностью таких задач равновесия является то, что мы имеем дело фактически с краевой задачей для эллиптического уравнения с разрывной нелинейной правой частью. В этой связи отметим, на наш взгляд, недостаточную проработку вопросов разрешимости и качественного поведения решения таких краевых задач в литературе по уравнениям с частными производными эллиптического типа. Это замечание касается, естественно, и численных методов решения краевых задач с разрывными нелинейными правыми частями.

Другой класс задач равновесия связан с приближением поверхностного тока, когда весь электрический ток сосредоточен на границе плазменного шнура. В этом случае необходимо ре-

шить уравнение (1.50) в  $\Omega_+$  с неизвестной границей  $S$ , определяемой двумя граничными условиями:

$$u(x) = u^*, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 = a_1 x_1^2 + a_2, \quad x \in S. \quad (1.55)$$

Задачи равновесия плазмы в тороидальных системах хорошо представлены в литературе (см.; например, [75—78]). Численные методы решения задач равновесия с распределенным продольным электрическим током излагаются в ряде работ обзорного характера [79—81]. Начиная с [82], в таких задачах получили распространение вычислительные алгоритмы, в которых неизвестная граница является координатной линией. Из других работ, где используется переход к новым независимым переменным, отметим [83—85].

Вопросы однозначной разрешимости задач равновесия с поверхностным током обсуждаются в работах [86, 87]. Численный метод, построенный на основе интегрального уравнения, описан в [88]. В работе [89] для задач этого типа применяется отмеченный выше подход с переходом к новым независимым переменным.

### 1.7. Другие стационарные задачи со свободной границей

Естественно, приведенные примеры ни в коей мере не исчерпывают класс задач со свободными границами для эллиптических уравнений. Отметим некоторые другие известные задачи этого типа. Во многих работах рассматривается задача гидродинамической смазки со свободной границей. О достижениях в данной области можно судить по работам [53, 90, 91]. Стационарные задачи для эллиптических уравнений второго порядка с неизвестной границей, на которой заданы однородные условия первого и второго рода, возникают в электрохимии. Более подробную информацию можно почерпнуть, например, из [92, 93].

Отметим также задачи со свободными границами, которые возникают при математическом моделировании плазмооптических систем. Наиболее интересные работы в этом направлении выполнены под руководством А. Г. Свешникова [94, 95]. Задача со свободной границей для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка возникает при исследовании распределенных джозефсоновских переходов [96, 97].

Здесь отмечены лишь наиболее характерные и достаточно известные задачи со свободными границами для эллиптических уравнений. Некоторые другие задачи этого класса можно найти в работах [98—100].

## § 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

### 2.1. Эллиптические уравнения

В ограниченной области  $\Omega$   $n$ -мерного евклидова пространства определим дифференциальный оператор  $k$ -го порядка в виде

$$L^{(k)}u \equiv a(x, u, Du, \dots, D^k u). \quad (2.1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n},$$

где  $D_i = \partial/\partial x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , а  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — мультииндекс. Запись правой части в (2.1) означает, что

$$a = a\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right).$$

В простейшем случае оператора нулевого порядка (2.1) имеем

$$L^{(0)}u \equiv a(x, u). \quad (2.2)$$

Определим квазилинейный эллиптический оператор порядка  $2m$  с помощью соотношения [101, 102]

$$L^{(2m)}u \equiv \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x, u) D^{2m}u + a(x, u, Du, \dots, D^{2m-1}u), \quad (2.3)$$

где  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ , а  $a_\alpha = a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ . Будем считать, что оператор  $L^{(2m)}$  равномерно эллиптивен в  $\Omega$ , т. е. существуют положительные постоянные  $\gamma_1, \gamma_2$  такие, что для всех  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , для всех  $x \in \Omega$  выполняются неравенства

$$\gamma_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^{2m} \leq \sum_{|\alpha|=2m} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n} \leq \gamma_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^{2m}. \quad (2.4)$$

Основным объектом нашего исследования будут эллиптические уравнения второго порядка. Из общего соотношения (2.3) вытекает, что

$$L^{(2)}u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a(x, u, Du), \quad (2.5)$$

а условие равномерной эллиптичности (2.4) принимает вид

$$\gamma_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \gamma_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Не ограничивая общности, в (2.5) можно считать выполненным условие

$$a_{ij}(x, u) = a_{ji}(x, u)$$

во всей области  $\Omega$ .

Эллиптический оператор второго порядка будет удобнее записать с выделением самосопряженной главной части в форме

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x, u, Du) \quad (2.6)$$

с  $a_{ij}(x, u) = a_{ji}(x, u)$ .

## 2.2. Задачи со свободной границей и их дефект

Рассмотрим теперь задачи со свободной границей для эллиптических уравнений и для их характеристики введем понятие дефекта. Пусть неизвестная граница  $S$  разбивает область  $\Omega$  на две подобласти:  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ . В каждой из этих областей решение задачи удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению. Положим для определенности, что в  $\Omega_+$  функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению эллиптического типа

$$L_+^{(2m)} u = 0, \quad x \in \Omega_+, \quad (2.7)$$

а в  $\Omega_-$

$$L_-^{(k)} u = 0, \quad x \in \Omega_-. \quad (2.8)$$

Поскольку мы рассматриваем задачи для эллиптических уравнений, то главный из двух операторов  $L_+^{(2m)}$  и  $L_-^{(k)}$ , т. е. тот оператор, порядок которого выше, должен быть эллиптическим. В нашем примере  $k \leq 2m$ , т. е. решение  $u(x)$  удовлетворяет эллиптическому уравнению в  $\Omega_+$ .

Естественно классифицировать задачи со свободными границами по порядку операторов в  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ . Назовем дефектом задачи со свободной границей величину

$$\kappa = 2m - k. \quad (2.9)$$

Таким образом, задача характеризуется порядком эллиптического оператора  $2m$  и дефектом  $\kappa$  ( $0 \leq \kappa \leq 2m$ ).

Рассмотрим с этой точки зрения задачи со свободной границей, рассмотренные в предыдущем параграфе. Квазистационарная задача Стефана принадлежит к классу задач с  $m=1$  и  $\kappa=0$ . В этом случае в обеих частях области  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  решение удовлетворяет эллиптическим уравнениям второго порядка, но со своими коэффициентами в каждой подобласти. По аналогии с классическими задачами Стефана задачи с нулевым дефектом часто называют двухфазными. К задачам с нулевым дефектом принадлежит и задача МГД-равновесия в постановке с распределенным продольным электрическим током. Наиболее характерным примером задачи с дефектом  $\kappa=1$  ( $m=1$ ) является проблема упругопластического кручения цилиндрических стержней.

К задачам с максимальным дефектом, равным двум, для эллиптических уравнений второго порядка относится задача фильтрации через дамбу, при ее рассмотрении во всей области  $\Omega$ . При этом в несмоченной части дамбы  $\Omega_-$  решение  $p(x)=0$ . Аналогичная задача возникает и при рассмотрении прогибов мембраны с ограничениями.

Задача расчета пластин с ограничениями относится к классу задач с максимальным дефектом, причем  $\kappa=4$  и эллиптический оператор имеет четвертый порядок. Необходимо заметить, что для задач с максимальным дефектом  $\kappa=2m$  в теории тепло- и массопереноса имеется другое название. Такие задачи, особенно задачи типа Стефана, принято называть однофазными.

Несколько особняком стоят задачи идеальной гидродинамики со свободными границами, которые обсуждались выше. Формально они не подпадают под нашу классификацию по причине отсутствия, по крайней мере в математической модели, области  $\Omega_-$ . Но указать область  $\Omega_-$  в таких задачах совсем нетрудно. Особенно просто это сделать, имея в виду физическое содержание задачи. В задачах идеальной гидродинамики со свободной границей жидкость—атмосфера область  $\Omega_-$  — это атмосфера над свободной границей, где и скорость и давление известны (скорость равна нулю, а давление равно атмосферному).

Вообще в задачах с неизвестной частью границы области  $\Omega_+$  всегда можно дополнить область  $\Omega_+$  областью  $\Omega_-$  до некоторой заданной области  $\Omega$ , целиком содержащей свободную границу  $S$ . Решение  $u(x)$  определяется в  $\Omega_-$  из физических соображений либо формальным продолжением  $u(x)$  в  $\Omega_-$ . Неоднозначность такого продолжения позволяет распорядиться им в соответствии с определенными критериями оптимальности. Такой подход не только полезен при классификации задач со свободными границами, но и позволяет строить эффективные вычислительные алгоритмы для приближенного решения

задач. Методы указанного класса обладают вполне конкретными свойствами однородности вычислительного алгоритма.

### 2.3. Особенность решения на неизвестной границе

Сама неизвестная граница  $S$ , как мы уже неоднократно убеждались, в задачах рассматриваемого класса определяется по решению задачи  $u(x)$ . Следствием этого является нелинейность задач со свободной границей. Чаще всего на неизвестной границе решение принимает заданные значения, например, в простейшем случае

$$u(x) = u^* = \text{const}, \quad x \in S.$$

Поэтому свободная граница определяется следующим образом:

$$S = \{x | x \in \Omega, \quad u(x) = u^*\}. \quad (2.10)$$

Область  $\Omega$  в случае (2.10) делится на две подобласти  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ . Будем для определенности полагать

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \{x | x \in \Omega, \quad u(x) > u^*\}, \\ \Omega_- &= \{x | x \in \Omega, \quad u(x) < u^*\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Конечно, вместо (2.10), (2.11) могут быть сформулированы и другие условия, но в данном случае это не имеет большого значения. Более существенным может оказаться вопрос о поведении решения задачи со свободной границей при переходе  $S$ . Рассмотрим, например, задачу со свободной границей с нулевым дефектом для эллиптического уравнения второго порядка

$$Lu = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.12)$$

где оператор  $L$  определен согласно (2.6). Общая ситуация на свободной границе  $S$  определяется следующими условиями сопряжения:

$$[u] = \psi_1(x), \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] = \psi_2(x), \quad x \in S, \quad (2.13)$$

где, как и ранее,  $[ ]$  означает скачок при переходе  $S$  из  $\Omega_+$  в  $\Omega_-$ , а

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\mathbf{N}, x_i). \quad (2.14)$$

В (2.14) величина  $\partial u / \partial \nu$  есть поток на границе  $S$ , а  $\cos(\mathbf{N}, x_i)$  —

направляющий косинус нормали к  $S$ , внешней по отношению к  $\Omega_+$ .

По поведению решений на свободной границе будем разделять задачи со свободной границей на два класса. В первом из них условия сопряжения однородны, т. е. в (2.13)  $\psi_i(x)=0$ ,  $i=1, 2$ . Такие задачи отнесем к задачам со свободной границей без особенности на неизвестной границе. Во втором классе (задачи с особенностью на свободной границе) условия сопряжения (2.13) неоднородны. В задачах со свободной границей обычно  $\psi_1(x)=0$  (см. примеры, рассмотренные выше), а второе условие сопряжения (2.13) может быть и неоднородным. Разрыв потока на  $S$  ( $\psi_2(x)\neq 0$ ) — характерная особенность задач типа Стефана, для которых  $\psi_2$  зависит еще и от решения.

## 2.4. Классификация параболических задач

Задачи со свободными границами для параболических уравнений могут быть классифицированы аналогично. В этом случае решение  $u(x, t)$  в области  $\Omega_+$ , которая теперь зависит и от времени, удовлетворяет параболическому уравнению

$$L_t^{(2m)} u = 0, \quad x \in \Omega_+, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

где, например,

$$L_t^{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - L^{(2)}. \quad (2.16)$$

Для задач с нулевым дефектом ( $\kappa=2m-k=0$ ) решение  $u(x, t)$  удовлетворяет в  $\Omega_-$  аналогичному параболическому уравнению. Если  $\kappa>0$ , то в  $\Omega_-$  может задаваться дифференциальный оператор  $L_t^{(k)}$  в форме

$$L_t^{(k)} u \equiv a \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, Du, \dots, D^k u \right). \quad (2.17)$$

Естественно, что (2.15) — (2.17) не охватывают всех возможностей, для которых пригодна предложенная выше классификация задач со свободной границей. В частности, можно было бы аналогичным образом рассмотреть задачи для простейших псевдопараболических уравнений, но это уведет нас в сторону от основного объекта исследования.

## § 3. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

## 3.1. Нестационарные задачи

В § 1 приведены примеры задач со свободной границей для эллиптических уравнений. Здесь мы укажем на некоторые другие задачи с неизвестной границей, близко примыкающие к рассмотренным выше. Наиболее естественное расширение класса задач со свободной границей — это нестационарные задачи со свободной границей. Задачи для параболических уравнений затронуты при рассмотрении вопроса класси-

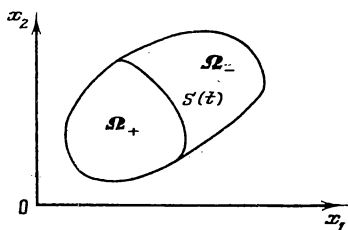


Рис. 11. К постановке нестационарной задачи Стефана:  $S=S(t)$  — неизвестная граница фазового перехода,  $\Omega_+$  — жидкая фаза,  $\Omega_-$  — твердая фаза

фикации. Наиболее характерным примером задач со свободной границей для параболических уравнений является классическая задача Стефана. Остановимся на постановке двухфазной задачи Стефана.

Пусть область  $\Omega$  (рис. 11) состоит из двух частей:  $\Omega_+$ , где температура  $u(x, t)$  превышает температуру плавления  $u^*$ , и  $\Omega_-$ , где  $u < u^*$  — твердая фаза. Уравнение теплопроводности, аналогичное (1.1), записывается в виде

$$\rho(u) c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(k(u) \nabla u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (3.1)$$

Пусть для простоты на границе  $\partial\Omega$  задана температура

$$u(x, t) = u_1(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

На неизвестной границе  $S=S(t)$  фазового перехода

$$u(x, t) = u^*, \quad x \in S, \quad t > 0. \quad (3.3)$$

Здесь ставятся условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad \left[ k(u) \frac{\partial u}{\partial N} \right] = \lambda(v_0 N), \quad (3.4)$$

где  $v_0$  — скорость движения границы  $S$ .

Уравнение (3.1) дополняется начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.5)$$

В другой популярной модели плавления и кристаллизации эффективно учитывается промежуточная фаза между твердым

и жидким веществом, границы которой определяются температурами солидуса и ликвидуса  $u_s$  и  $u_l$  соответственно. В интервале температур от  $u_s$  до  $u_l$  находится двухфазная зона. Уравнение теплопроводности в этом случае выглядит следующим образом:

$$\rho(u) \bar{c}(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla (k(u) \nabla u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

где теплоемкость в каждой из трех фазовых зон определяется по разному:

$$\bar{c}(u) = \begin{cases} c_l(u), & u > u_l, \\ c_l(u) - \lambda \psi'(u), & u_s < u < u_l, \\ c_s(u), & u < u_s. \end{cases}$$

Здесь  $\psi(u)$  — объемная доля твердой фазы в двухфазной зоне. Зависимость  $\psi(u)$  определяется по равновесной диаграмме конкретного материала.

В данном случае, в отличие от задачи Стефана в классической постановке (3.1) — (3.5), выделение теплоты происходит в заданном интервале температур. Задача (3.6), (3.3), (3.5) имеет формально две неизвестные границы  $S_s$ ,  $S_l$  — между твердой фазой и двухфазной зоной, а также между двухфазной зоной и жидкой фазой. Но на этих границах нет особенности решения — и температура и тепловой поток непрерывны. Последнее обстоятельство позволяет легко строить эффективные вычислительные процедуры для приближенного решения таких задач.

Классическая задача Стефана (3.1) — (3.5) допускает обобщенную формулировку в виде уравнения (3.6) с коэффициентом теплоемкости

$$\bar{c}(u) = c(u) + \lambda \delta(u - u^*), \quad (3.7)$$

где  $\delta(u)$  — дельта-функция. Основные вычислительные методы решения задачи Стефана (3.1) — (3.5) строятся главным образом на использовании (3.6), (3.7) и «размазывании» дельта-функции в (3.7).

Приведем еще один пример нестационарной задачи. В п. 1.2 мы рассматривали задачи идеальной гидродинамики. Для задач идеальной гидродинамики со свободными границами характерно то, что уравнения остаются эллиптическими, а нестационарными становятся граничные условия.

Рассмотрим, например, потенциальные плоские течения идеальной жидкости. Тогда течение описывается уравнением Лапласа для потенциала скорости  $\varphi(x, t)$ :

$$\Delta \varphi = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_+, \quad t > 0,$$

где  $u_1 = \partial\varphi/\partial x_1$ ,  $u_2 = \partial\varphi/\partial x_2$ . На неизвестной границе  $S(t)$  в силу условия непротекания  $(\mathbf{uN})=0$  получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N}(x, t) = 0, \quad x \in S, \quad t > 0.$$

На  $S$  в нестационарном случае постоянное значение имеет интеграл Коши—Лагранжа (нестационарный интеграл Бернули):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) + p + \rho g x_2 = \text{const}, \quad x \in S, \quad t > 0. \quad (3.8)$$

Характерной особенностью этих задач как раз и является нестационарность граничного условия (3.8).

### 3.2. Системы уравнений

Нами сформулированы некоторые задачи со свободной границей для одного уравнения. Естественно, что более сложные ситуации возникают при рассмотрении задач для систем уравнений. Остановимся на некоторых примерах. Стационарный пучок в ускорителе описывается [103] уравнениями

$$L_0 u_1 - (c_0(x) + c_1(x)) u_1 = -f_1(x), \quad (3.9)$$

$$L_0 u_2 - c_2(x) u_2 = -f_2(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.10)$$

где  $L_0$  — эллиптический оператор вида

$$L_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

а коэффициенты  $c_1(x)$  и  $c_2(x)$  отличны от нуля только внутри пучка. На неизвестной границе пучка  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  непрерывны вместе со своими первыми производными. Сама граница определяется нелинейным функциональным соотношением

$$\Phi(x, u_1, u_2) = 0, \quad x \in S. \quad (3.11)$$

Очевидно, что задачи типа (3.9)—(3.11) могут быть включены в наше рассмотрение. Эта задача может быть классифицирована как задача с нулевым дефектом и без особенности на свободной границе. Специфика задачи (3.9)—(3.11) в условии (3.11) для определения границы пучка. О некоторых результатах численного исследования задачи типа (3.9)—(3.11) можно ознакомиться по работам [104, 105]. Отметим также, что эта задача может рассматриваться как в ограниченной, так и в неограниченной области  $\Omega$ .

Приведем пример системы параболических уравнений со свободной границей. В теории горения развивается гидродина-

мическая модель, которая приводит к необходимости решения двух уравнений [106]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) u_1 = \Delta u_1, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) u_2 = \Delta u_2 + \eta \Delta u_1, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (3.13)$$

На известной границе ставятся условия типа Стефана:

$$[u_i] = 0, \quad i = 1, 2, \quad x \in S, \quad (3.14)$$

$$\left[ \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{N}} \right] = -\frac{1}{\eta} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{N}} \right] = \lambda \exp \left( \frac{u_2}{\theta} \right), \quad x \in S, \quad (3.15)$$

с некоторыми условиями на определение свободной границы  $S$ . В уравнениях (3.12), (3.13) поле скоростей  $\mathbf{v}$  считается заданным, а условия сопряжения развязаны. Возможна квазистационарная постановка задачи (3.12) — (3.15).

### 3.3. Задачи с неизвестными граничными условиями

К задачам со свободными границами тесно примыкают задачи, в которых область хотя и задана, но условия на границе  $\partial\Omega$  ставятся разные в зависимости от искомого решения. Подобные примеры рассмотрены в книге [52]. Рассмотрим задачу о фильтрации с полупроницаемой мембраной. Предположим, что граница  $\partial\Omega$  такова, что она позволяет поступать жидкости в область  $\Omega$ , но препятствует ее вытеснению. В простейшем случае (см. п. 1.3) давление  $u = p$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.16)$$

Пусть к  $\partial\Omega$  приложено давление  $\varphi(x)$ . Предположим, что на некотором участке границы  $\partial\Omega$  давление с внешней стороны меньше, чем с внутренней, т. е.  $u(x) > \varphi(x)$ . Тогда жидкость стремится покинуть  $\Omega$ , но мембрана на границе препятствует этому, и, следовательно, поток  $\partial u / \partial \mathbf{N} = 0$ . Если  $u(x) < \varphi(x)$ , то жидкость беспрепятственно втекает в  $\Omega$ . В силу конечности потока на этой части границы имеем  $u(x) = \varphi(x)$ . Приходим к следующим краевым условиям для уравнения (3.16):

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_+ (u(x) > \varphi(x)), \quad (3.17)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega_-. \quad (3.18)$$

Таким образом, задача состоит в том, чтобы указать части границы  $\partial\Omega_+$  и  $\partial\Omega_-$ , на которых выполнены условия (3.17) и (3.18) соответственно.

### 3.4. Задачи с уравнениями для свободной границы

Достаточно обширный класс задач со свободными границами удается свести к задачам, в которых уравнение свободной границы выступает в качестве искомого решения. Рассмотрим характерный пример задач этого типа: потенциальные течения несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды [107, 108]. Будем изучать плоское течение в неглубоком канале с неровным дном. Пусть уравнение дна имеет вид

$$x_2 = -h(x_1), \quad (3.19)$$

а уравнение свободной поверхности

$$x_2 = u_2(x_1, t). \quad (3.20)$$

Обозначим через  $u_1(x_1, t)$  компоненту скорости в направлении  $x_1$ . Тогда система уравнений мелкой воды имеет вид

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \left( \frac{u_1^2}{g} - u_2 - h \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_1}{g} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{dh}{dx_1} u_1, \quad (3.21)$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{u_1}{g} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{g} \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad (3.22)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Определяющим моментом данной задачи со свободной границей (3.21), (3.22) является то, что правая часть уравнения неизвестной границы (3.20) явно входит в (3.21), (3.22), для которых ставится соответствующая начально-краевая задача.

Отметим, что такой подход очень плодотворен и широко используется в гидравлике [109, 110]. Другой, более простой, пример задачи с дифференциальным уравнением для свободной границы — нахождение равновесной формы капли, мениска. В таких задачах (см., например, [111]) гидростатическое состояние определяется кривизной поверхности, поверхностным натяжением, что приводит в простейшем случае к обыкновенному уравнению второго порядка. Такие задачи представляют большой интерес в условиях пониженной гравитации [112].

### 3.5. Обратные задачи со свободными границами

В данной работе будут рассмотрены некоторые вопросы приближенного решения так называемых обратных задач со свободными границами. Этот новый класс задач пока не нашел соответствующего отражения в литературе, что вызывает дополнительный интерес к такого рода проблемам.

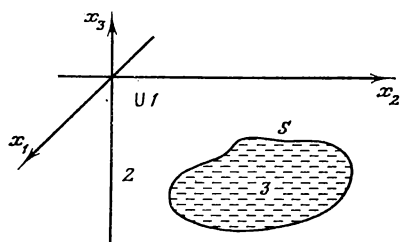
Рассмотрим пример электроразведки постоянным током [113, 114]. На поверхности земли (рис. 12) имеется тонкий

электрод, с которого стекает постоянный ток. Потенциал этого тока удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = -I\delta(x - x_0), \quad x_3 \leq 0, \quad (3.23)$$

где  $I$  — плотность точечного источника тока,  $\delta(x)$  — трехмерная дельта-функция, а  $x_0$  — точка земной поверхности. На границе воздух—земля ставится условие

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = 0, \quad x_3 = 0. \quad (3.24)$$



Предположим теперь, что включение 3 (рис. 12) является диэлектриком (фундамент, основание и т. д.). Тогда на неизвестной границе диэлектрика ставится условие

Рис. 12. Обратная задача электро-разведки: 1 — электрод, 2 — земля, 3 — включение, S — его граница.

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in S. \quad (3.25)$$

При электроразведке постоянным током измеряется разность потенциалов на земной поверхности, поэтому можно считать, что помимо (3.24) задано условие

$$u(x) = \varphi(x), \quad x_3 = 0. \quad (3.26)$$

По измерениям  $\varphi(x)$  возможно восстановить неизвестную границу  $S$ .

Такая задача принадлежит к классу условно-корректных [115]. Она известна в литературе под названием задача Коши для уравнения Лапласа. Особенность некорректной задачи (3.23) — (3.26), в отличие от рассмотренных выше, состоит в том, что дополнительное условие, в данном случае (3.26), ставится не на самой неизвестной границе, а на известной части границы. Устойчивые методы численного решения некорректных задач строятся на основе метода регуляризации Тихонова [115—117]. Для дифференциальных уравнений с частными производными получил распространение метод квазиобращения [118].

## ГЛАВА II

### ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УТОЧНЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЫ

#### § 1. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ С НУЛЕВЫМ ДЕФЕКТОМ

##### 1.1. Постановка задачи

Все методы решения задач со свободной границей относятся к итерационным в силу нелинейности этих задач. Здесь выделены методы, в которых идея последовательного уточнения неизвестной границы проявляется наиболее зримо. Мы остановимся на задачах для эллиптических уравнений второго порядка с нулевым дефектом. Методы приближенного решения задач со свободной границей, основанные на использовании метода штрафа, фактически сводят задачи с ненулевым дефектом к задачам, рассматриваемым ниже. Это позволяет применять развиваемые итерационные методы и в других задачах со свободной границей.

Рассмотрим простейшую задачу для эллиптического уравнения второго порядка с  $\kappa=0$ . В области  $\Omega$  решение  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$Lu=0, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

где  $L$  — эллиптический оператор с самосопряженной главной частью и нелинейными коэффициентами

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x, u, Du). \quad (1.2)$$

В задаче с нулевым дефектом коэффициенты  $a, a_{ij}$  в (1.2) разрывны на неизвестной границе  $S$ . Пусть на  $S$   $u(x) = u^*$ , т. е.

$$S = \{x | x \in \Omega, \quad u(x) = u^*\}. \quad (1.3)$$

Тогда

$$\Omega_+ = \{x | x \in \Omega, \quad u(x) > u^*\},$$

$$\Omega_- = \{x | x \in \Omega, \quad u(x) < u^*\},$$

а для коэффициентов используем обозначения

$$a, a_{ij} = \begin{cases} a^+, a_{ij}^+, & x \in \Omega_+, \\ a^-, a_{ij}^-, & x \in \Omega_-. \end{cases} \quad (1.4)$$

Пусть на свободной границе  $S$  выполнены условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad x \in S, \quad (1.5)$$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] = \psi(x), \quad x \in S, \quad (1.6)$$

где, как и ранее,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\mathbf{N}, x_i).$$

Предположим также, что на границе области  $\partial\Omega$  задано граничное условие первого рода

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.7)$$

Дадим краткое описание возможных подходов к приближенному решению поставленной задачи со свободной границей (1.1)–(1.7).

## 1.2. Последовательные приближения

Задача (1.1)–(1.7) является нелинейной. Поэтому для ее приближенного решения необходимо использовать итерационные методы. В книге [119] подробно описаны основные подходы для численного решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. В рассматриваемой задаче имеется ряд особенностей, которые не позволяют использовать большинство методов, описанных в литературе [119, 120].

Запишем задачу (1.1)–(1.7) в операторной форме:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{F}, \quad (1.8)$$

где  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(u)$ , причем в силу разрывности коэффициентов эллиптического оператора при переходе неизвестной границы  $S$  оператор  $\mathcal{A}$ , вообще говоря, недифференцируем. При записи краевой задачи (1.1)–(1.7) в форме (1.8) правая часть также может быть нелинейной, т. е.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u)$ .

Общий двухслойный итерационный метод, связывающий два приближения  $u^{k+1}(x)$  и  $u^k(x)$ , для решения (1.8) можно записать в виде

$$\mathcal{B}_{k+1} \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau_{k+1}} + \mathcal{A}(u^k) u^k = \mathcal{F}(u^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.9)$$

с некоторым заданным начальным приближением  $u^0(x)$ . Сходимость итерационного процесса (1.9) существенно зависит от выбора  $\mathcal{B}_{k+1}$  и итерационных параметров  $\tau_{k+1}$ .

В задачах типа (1.1)—(1.7) трудно априори указать оптимальное значение итерационных параметров  $\tau_{k+1}$ . Поэтому естественно использовать метод простой итерации, когда  $\tau_{k+1} = \tau = \text{const}$ . Простейший вариант этого метода связан с последовательными приближениями по нелинейностям, когда коэффициенты эллиптического уравнения берутся с предыдущей итерации. Это соответствует тому, что в (1.9)

$$\tau_{k+1} = 1, \quad \mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{A}(u^k). \quad (1.10)$$

В более развернутой записи итерационный процесс (1.9), (1.10) применительно к (1.1)—(1.7) записывается в виде

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x, u^k) \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x_j} + a(x, u^k, Du^k) = 0 \quad (1.11)$$

с граничным условием

$$u^{k+1}(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.12)$$

Приближение  $S^h$  для неизвестной границы  $S$  определяется по заданному приближению  $u^h(x)$  согласно (1.3), т. е.

$$S^h = \{x | x \in \Omega, \quad u^h(x) = u^*\}. \quad (1.13)$$

Условия сопряжения на  $S^h$  определяются из (1.5), (1.6):

$$[u^{k+1}] = 0, \quad x \in S^h, \quad (1.14)$$

$$\left[ \frac{\partial u^{k+1}}{\partial \nu} \right] = \psi(x), \quad x \in S^h. \quad (1.15)$$

Таким образом, на каждом итерационном шаге  $k+1$  при использовании итерационного процесса (1.11)—(1.15) необходимо решить линейную задачу. Это можно сделать, применяя современные прямые и итерационные методы [121—123]. Неоднородность условия сопряжения усложняет ситуацию. Далее мы рассмотрим этот вопрос более подробно. Первая возможность связана с непосредственной аппроксимацией неоднородных условий сопряжения при применении обычных разностных методов [124]. Другие возможности отмечены ниже в § 2 и § 3. Начнем с простейшей одномерной задачи.

### 1.3. Конечно-разностная аппроксимация условий сопряжения в одномерном случае

Рассмотрим модельную одномерную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на интервале  $(0, l)$ :

$$\frac{d}{dx} k(x) \frac{du}{dx} - q(x) u = -f(x), \quad x \in (0, l), \quad (1.16)$$

где  $k(x) \geq k_0 > 0$ , с простейшими граничными условиями

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2. \quad (1.17)$$

Пусть при  $x = \xi$  ставятся условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad \left[ k(x) \frac{du}{dx} \right] = \psi, \quad x = \xi, \quad (1.18)$$

где

$$[r] = r(x+0) - r(x-0).$$

Для построения разностной схемы для задачи (1.16)–(1.18) введем разностную сетку с постоянным шагом  $h$

$$\bar{\omega}_h = \{x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\}$$

и применим интегро-интерполяционный метод [124]. Пусть  $\xi = x_p + \theta h$ , где  $-1/2 \leq \theta < 1/2$ , т. е.

$$x_{p-1/2} \leq \xi < x_{p+1/2}.$$

Проинтегрируем уравнение (1.16) по отрезку  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ , где  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $i \neq p$ . Пусть  $w(x) = -k(x) \frac{du}{dx}$ , тогда, используя стандартные обозначения теории разностных схем, получим

$$w_{i-1/2}^h - w_{i+1/2}^h = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (q(x) u^h(x) - f(x)) dx. \quad (1.19)$$

Пусть  $u^h(x) = u_i^h$  при  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ , а  $w^h(x) = w_{i-1}^h$  при  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ . Тогда

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u^h(x) dx = h d_i u_i^h, \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx. \quad (1.20)$$

На отрезке  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  проинтегрируем равенство

$$\frac{du}{dx} = -\frac{w(x)}{k(x)},$$

получим

$$u_{i-1}^h - u_i^h = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w^h(x)}{k(x)} dx = w_{i-1/2}^h \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}. \quad (1.21)$$

Из (1.21) вытекает

$$w_{i-1/2}^h = -a_i \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h}, \quad (1.22)$$

где

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}$$

Из (1.19) — (1.22) получим для всех внутренних узлов, кроме  $i=p$ , следующую разностную схему:

$$(au^h_x)_x - du^h = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad x \neq x_p, \quad (1.23)$$

где

$$\varphi(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx.$$

При интегрировании от  $x_{p-1/2}$  до  $x_{p+1/2}$  имеем при  $x = x_p$

$$\begin{aligned} \int_{x_{p-1/2}}^{x_{p+1/2}} \frac{dw^h}{dx} dx &= \int_{x_{p-1/2}}^{\xi} \frac{dw^h}{dx} dx + \int_{\xi}^{x_{p+1/2}} \frac{dw^h}{dx} dx = \\ &= w_{p+1/2}^h - w_{p-1/2}^h - [w^h]. \end{aligned}$$

Вместо (1.19) получим

$$w_{p-1/2}^h - w_{p+1/2}^h + [w^h] = \int_{x_{p-1/2}}^{x_{p+1/2}} (q(x) u^h(x) - f(x)) dx. \quad (1.24)$$

Учитывая условия сопряжения (1.18), с помощью аналогичных выкладок получим разностную схему для всех внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ :

$$(au^h_x)_x - du^h = -\varphi + \psi \frac{\delta_{ip}}{h}, \quad (1.25)$$

где

$$\delta_{ip} = \begin{cases} 1, & i = p, \\ 0, & i \neq p. \end{cases}$$

Уравнение (1.25) дополняется граничными условиями, определяемыми (1.17):

$$u_0^h = \mu_1, \quad u_N^h = \mu_2. \quad (1.26)$$

Таким образом, при аппроксимации неоднородного условия сопряжения (1.18) получим разностную задачу (1.25), (1.26) с сеточной  $\delta$ -функцией в правой части (1.25).

#### 1.4. Двумерная задача сопряжения

Несколько сложнее ситуация в двумерном случае. Чтобы не усложнять изложение, ограничимся следующей задачей в прямоугольнике  $\Omega$ :

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}.$$

Функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.27)$$

с граничным условием первого рода

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.28)$$

и условиями сопряжения на границе  $S$

$$[u] = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial N} \right] = \psi(x), \quad x \in S. \quad (1.29)$$

Для построения однородной разностной схемы для поставленной задачи (1.27)–(1.29) применим интегро-интерполяционный метод. В  $\Omega$  введем сетку, равномерную по обеим переменным  $x_1$  и  $x_2$ ,

$$\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h = \{x = (x_{1i}, x_{2j}) = (ih_1, jh_2),$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\},$$

где  $\omega_h$  — множество внутренних узлов, а  $\gamma_h$  — граничных.

Рассмотрим несколько характерных случаев. Ограничимся задачами со спрямленными участками кривой сопряжения (рис. 13). Выделим прямоугольник шириной  $h_1$  и высотой  $h_2$  с центром в узле [125]. Проинтегрируем по нему уравнение (1.27). С учетом обозначений рис. 13 получим

$$\begin{aligned} & - \int_1^2 \frac{\partial u^h}{\partial x_2} d\tau + \int_2^3 \frac{\partial u^h}{\partial x_1} d\tau + \int_3^4 \frac{\partial u^h}{\partial x_1} d\tau + \int_4^5 \frac{\partial u^h}{\partial x_2} d\tau - \\ & - \int_5^6 \frac{\partial u^h}{\partial x_2} d\tau - \int_6^1 \frac{\partial u^h}{\partial x_2} d\tau + \int_6^3 \left( \frac{\partial u^h}{\partial N} \right)_+ d\tau - \int_6^3 \left( \frac{\partial u^h}{\partial N} \right)_- d\tau = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

С учетом условий сопряжения (1.29) имеем

$$\left[ \frac{\partial u^h}{\partial \mathbf{N}} \right] = \left( \frac{\partial u^h}{\partial \mathbf{N}} \right)_+ - \left( \frac{\partial u^h}{\partial \mathbf{N}} \right)_- = \psi(x). \quad (1.31)$$

Используя (1.31), получим

$$\int_6^3 \left[ \frac{\partial u^h}{\partial \mathbf{N}} \right] d\tau \approx \psi(x) \Delta S, \quad (1.32)$$

где  $\Delta S$  — длина участка границы сопряжения (6.3). Имеем

$$\frac{\partial u^h}{\partial x_2} = \frac{\partial u^h}{\partial \mathbf{N}} \cos(\mathbf{N}, x_2) + \frac{\partial u^h}{\partial \tau} \cos(\tau, x_2),$$

где  $\cos(\mathbf{N}, x_2)$  — косинус угла между нормалью  $\mathbf{N}$  и осью  $x_2$  (рис. 13). Используя непрерывность касательной производной, получим в точке 3

$$\left( \frac{\partial u^h}{\partial x_2} \right)_+ - \left( \frac{\partial u^h}{\partial x_2} \right)_- = -\psi(x) \cos \varphi_0, \quad (1.33)$$

где  $\varphi_0$  — угол между касательной к границе и осью  $x_2$ . Принимая во внимание, что в точке 3

$$\left( \frac{\partial u^h}{\partial x_2} \right)_+ \approx u_{x_2}^h,$$

при интегрировании по отрезкам (2.3) и (3.4) получим

$$\int_2^3 \frac{\partial u^h}{\partial x_2} d\tau \approx u_{x_2}^h (h_1 - \Delta_{34}), \quad (1.34)$$

где  $\Delta_{34}$  — расстояние между точками 3 и 4. С учетом (1.33) имеем

$$\int_3^4 \frac{\partial u^h}{\partial x_2} d\tau \approx (u_{x_2}^h + \psi(x) \cos \varphi_0) \Delta_{34}. \quad (1.35)$$

Для точки 6 аналогичные рассуждения дают равенство (1.33) и

$$\left( \frac{\partial u^h}{\partial x_2} \right)_- \approx u_{x_2}^h.$$

Поэтому

$$\int_5^6 \frac{\partial u^h}{\partial x_2} d\tau \approx u_{x_2}^h (h_1 - \Delta_{61}), \quad (1.36)$$

$$\int_6^1 \frac{\partial u^h}{\partial x_2} d\tau \approx (u_{x_2}^h - \psi(x) \cos \varphi_0) \Delta_{61}. \quad (1.37)$$

Подстановка (1.34) — (3.37) в (1.30) — (1.32) дает

$$\begin{aligned} & -u_{x_1}^h h_2 + u_{x_1}^h h_2 + u_{x_2}^h h_1 - u_{x_2}^h h_1 + \\ & + \psi(x) \Delta S + \psi(x) \cos \varphi_0 (\Delta_{34} + \Delta_{61}) = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Для длины участка границы сопряжения  $\Delta S$  имеем

$$\Delta S = h_2 / \sin \varphi_0.$$

Очевидно,

$$\Delta_{34} + \Delta_{61} = h_1 - h_2 \operatorname{ctg} \varphi_0.$$

Поэтому

$$\Delta S + (\Delta_{34} + \Delta_{61}) \cos \varphi_0 = h_1 \cos \varphi_0 + h_2 \sin \varphi_0. \quad (1.39)$$

Далее подставляем (1.39) в (1.38) и получаем следующее уравнение:

$$u_{x_1 x_1}^h + u_{x_2 x_2}^h = -\psi(x) \frac{h_1 \cos \varphi_0 + h_2 \sin \varphi_0}{h_1 h_2}. \quad (1.40)$$

Таким образом, при прохождении линии сопряжения так, как показано на рис. 13, в разностном уравнении появляется правая часть

$$F(x) = \psi(x) \frac{h_1 \cos \varphi_0 + h_2 \sin \varphi_0}{h_1 h_2}.$$

Вторая возможность поведения границы сопряжения показана на рис. 14. Интегрирование по выделенному прямоугольнику дает

$$-\int_1^2 \frac{\partial u^h}{\partial x_1} d\tau - \int_2^3 \frac{\partial u^h}{\partial x_1} d\tau \approx -u_{x_1}^h h_2 - \int_1^2 \left( \frac{\partial u^h}{\partial x_1} - u_{x_1}^h \right) d\tau. \quad (1.41)$$

Имеем

$$\left( \frac{\partial u^h}{\partial x_1} \right)_+ - \left( \frac{\partial u^h}{\partial x_1} \right)_- = \psi(x) \sin \varphi_0. \quad (1.42)$$

Из (1.41), (1.42) получим

$$-\int_1^2 \frac{\partial u^h}{\partial x_1} d\tau - \int_2^3 \frac{\partial u^h}{\partial x_1} d\tau \approx -u_{x_1}^h h_2 + \psi(x) \Delta_{12} \sin \varphi_0.$$

Отсюда вытекает равенство, аналогичное (1.38):

$$h_1 h_2 (u_{x_1 x_1}^h + u_{x_2 x_2}^h) + \psi(x) (\Delta S + \Delta_{45} \cos \varphi_0 + \Delta_{12} \sin \varphi_0) = 0. \quad (1.43)$$

Нетрудно видеть, что (1.43) приводит к тому же самому уравнению (1.40).

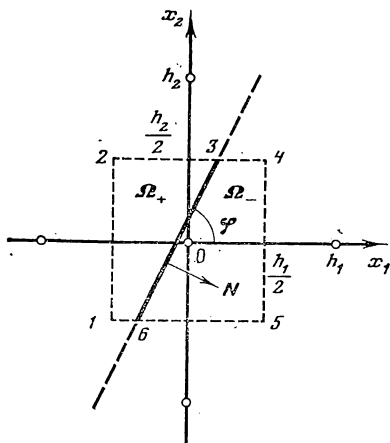


Рис. 13. Аппроксимация условий сопряжения:  $\Delta S = \Delta_{63}$  — спрямленный участок границы сопряжения  $S$ ,  $N$  — нормаль к  $\Delta S$

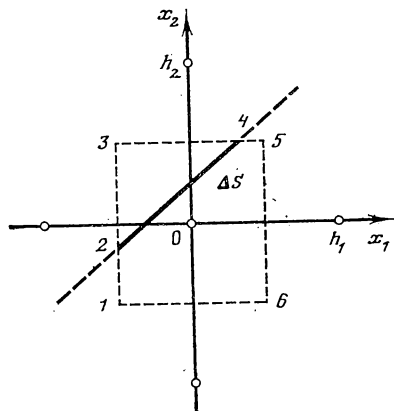


Рис. 14

Третья возможность (рис. 15) приводит к разностному уравнению

$$u_{x_1 x_1}^h + u_{x_2 x_2}^h = -F(x) \quad (1.44)$$

с правой частью

$$F(x) = \psi(x) \frac{h_1 \cos \varphi_0}{h_1 h_2}. \quad (1.45)$$

И наконец, может иметь место ситуация, изображенная на рис. 16. Аналогичные выкладки дают уравнение (1.44) с правой частью  $F(x) = 0$ .

Объединение рассматриваемых возможных случаев прохождения границы сопряжения дает разностное уравнение (1.44) с

$$F(x) = \psi(x) \frac{\delta_{is} h_1 \cos \varphi_0 + \delta_{js} h_2 \sin \varphi_0}{h_1 h_2}. \quad (1.46)$$

Здесь  $\delta_{is} = 0$ , если кривая  $S$  не пересекает  $x = x_i$  в выделенном

прямоугольнике, и  $\delta_{is}=1$ , если пересекает. Аналогично определяется и  $\delta_{js}$ .

Более удобная для численной реализации аппроксимация неоднородных условий сопряжения (1.29) связана с уравнениям

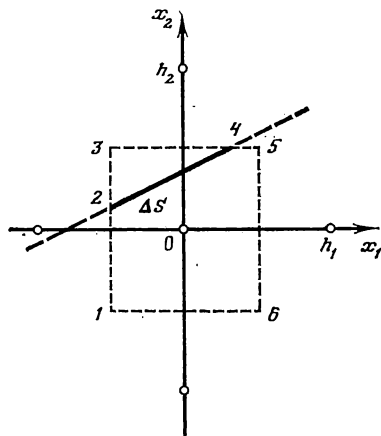


Рис. 15

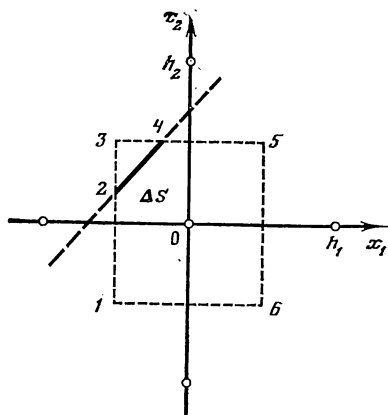


Рис. 16

(1.44), для которого правая часть определяется с помощью соотношения

$$F(x) = \psi(x) \frac{\Delta S}{h_1 h_2}. \quad (1.47)$$

Она может быть получена, например, с использованием результатов § 3 или же полностью аналогично рассмотренному случаю (1.46).

Разностная задача (1.44), (1.47) очень близка к одномерной задаче (1.25). Здесь также введена сеточная дельта-функция, но в данном случае она двумерная.

## § 2. МЕТОД АДДИТИВНОГО ВЫДЕЛЕНИЯ ОСОБЕННОСТИ

### 2.1. Класс задач

Рассмотрим задачи со свободной границей и нулевым дефектом, которые сводятся к решению уравнений

$$Lu \equiv \mathcal{L}u + a(x, u, Du) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}^0(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

линейный эллиптический оператор. Хотя класс задач, описываемый уравнением (2.1), и ограничен, но достаточно важен на практике. Сразу же заметим, что описываемый ниже метод может применяться и для более сложных задач. Второе замечание касается того, что к уравнениям (2.1), (2.2) сводятся задачи для квазилинейных эллиптических операторов (1.2), имеющих главную часть

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

при дополнительном условии, что

$$a_{ij}(x, u) = a_{ij}^0(x) b(u), \quad b(u) > 0.$$

Для такого перехода достаточно ввести вместо  $u(x)$  новую функцию  $v = v(u)$  с помощью соотношения

$$v(u) = \int_0^u b(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Замена (2.3) удобна при приближенном решении задач типа Стефана (см. § 4), а также при их математическом анализе [126].

Уравнение (2.1) дополним краевым условием на  $\partial\Omega$ , например,

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.4)$$

Как и ранее, будем считать, что свободная граница разделяет область  $\Omega$  на две подобласти  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  и на ней  $u(x) = u^*$ . На  $S$  выполнены условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] = \psi(x), \quad x \in S, \quad (2.5)$$

где  $\partial/\partial \nu$  определяется согласно § 1.

## 2.2. Аддитивное выделение особенности

Рассмотрим вопрос о выполнении условий сопряжения (2.5) при приближенном решении задачи со свободной границей

(2.1) — (2.5). Для этого представим решение  $u(x)$  в виде суммы двух функций:

$$u(x) = w(x) + z(x). \quad (2.6)$$

Выберем  $z(x)$  так, чтобы для  $w(x)$  условия сопряжения на  $S$  были однородны. Таким образом, необходимо построить функцию  $z(x)$ , достаточно гладкую в  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ , где  $u(x) > u^*$  и  $u(x) < u^*$  соответственно, и чтобы выполнялись условия

$$[z] = 0, \quad \left[ \frac{\partial z}{\partial \nu} \right] = \psi(x), \quad x \in S. \quad (2.7)$$

Выбор функции  $z(x)$  может быть сделан различными способами. Например, укажем такой прием. Пусть  $z(x) = 0$ ,  $x \in \Omega_-$ . В области  $\Omega_+$  определим  $z(x)$  как решение задачи

$$\mathcal{L}z = 0, \quad x \in \Omega_+, \quad (2.8)$$

$$z(x) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}(x) = \psi(x), \quad x \in S. \quad (2.9)$$

Задача (2.8) — (2.9) является задачей Коши для эллиптических уравнений и принадлежит к классу условно-корректных [115—118]. Для ее решения можно использовать различные регуляризующие алгоритмы. Мы не будем их здесь обсуждать. Некоторые возможные подходы рассматриваются в гл. VI. С другой стороны, применение такого метода для построения функции  $z(x)$  может оказаться малооправданным.

Методы, в которых решение задачи  $u(x)$  представляется в виде (2.6), с выбором  $z(x)$ , удовлетворяющей соотношениям (2.7), мы будем относить к методам аддитивного выделения особенности на свободной границе.

### 2.3. Метод потенциалов

Рассмотрим второй вариант построения функции  $z(x)$ . Пусть  $G(x, y)$  — фундаментальное решение оператора  $\mathcal{L}$ , определяемого (2.2). Некоторые известные фундаментальные решения можно найти в книге [127]. Следует заметить также, что мы можем вместо  $G(x, y)$  взять его главную часть, известную в теории эллиптических уравнений как функция Леви [101, 128]:

Возьмем  $z(x)$  в виде потенциала простого слоя:

$$z(x) = \int_S \psi(y) G(x, y) d\tau. \quad (2.10)$$

Исходя из основных свойств потенциалов [128, 129], легко

убеждаемся в справедливости условий сопряжения (2.7) на  $S$ . Сама функция  $z(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}z=0 \quad (2.11)$$

во всех точках области  $\Omega$ , кроме свободной границы  $S$ .

Очевидно, что метод потенциалов можно использовать и в случае, когда и сама функция  $z(x)$  разрывна, т. е. когда оба условия сопряжения на неизвестной границе неоднородны. В этом случае  $z(x)$  определяется как сумма потенциалов простого и двойного слоя. Аналогично [130] могут быть рассмотрены и более сложные условия при переходе границы  $S$ .

С учетом (2.10), (2.11) и представления (2.6) для функции  $w(x)$  получим уравнение

$$\mathcal{L}w + a(x, w + z, D(w + z)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.12)$$

с граничным условием

$$w(x) = \varphi(x) - z(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.13)$$

где  $z(x)$  уже определена. Существенно, что задача (2.12), (2.13) для  $w(x)$  не содержит особенности на границе сопряжения  $S$ , так как выполнены однородные условия

$$[w] = 0, \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = 0, \quad x \in S. \quad (2.14)$$

Особенностью предлагаемого метода потенциалов при реализации метода аддитивного выделения особенности на свободной границе является то, что приходится рассчитывать потенциал  $z(x)$  во всех узлах сетки, покрывающей расчетную область  $\Omega$ . Это приводит к значительным затратам машинного времени, так как при числе узлов по одному направлению, равном  $N$ , для вычисления потенциала  $z(x)$  в двумерном случае требуется  $O(N^3)$  арифметических действий. Вычислительный алгоритм решения всей задачи должен учитывать такую специфику прямого вычисления поверхностных потенциалов.

Здесь уместно сделать следующее замечание. В настоящее время сформировалось направление в вычислительной математике по экономическому вычислению значений потенциалов на основе решения краевых задач. Применительно к задачам расчета объемного потенциала в физике плазмы и гравиметрии такой подход описан в работах [79, 131]. В [132, 133] та же идея применяется для расчета значений потенциала простого и двойного слоев. Использование этого метода позволяет рассчитывать значения  $z(x)$  внутри  $\Omega$  при  $\mathcal{L} = \Delta$ ,  $n = 2$  за  $O(N^2)$  арифметических действий.

### § 3. МЕТОД СГЛАЖИВАНИЯ В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

#### 3.1. Обобщенная формулировка задачи с нулевым дефектом

Рассмотрим задачу со свободной границей (1.1)–(1.7), которая обсуждается в § 1. Для этой задачи в § 1 рассматривается метод непосредственной аппроксимации условий сопряжения (1.6), а в § 2 — метод аддитивного выделения особенности с использованием, например, теории потенциала для линейных эллиптических уравнений. Здесь мы дадим обобщенную формулировку задачи (1.1)–(1.7) без явного выделения свободной границы. Это позволяет при приближенном решении таких задач использовать схемы сквозного счета.

Рассмотрим в области  $\Omega$  уравнение вида

$$Lu = -\psi(x) \delta(u - u^*) \frac{\partial u}{\partial N}, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

где  $\delta(u)$  — дельта-функция. Покажем, что для задачи (3.1), (1.7) реализуются условия сопряжения (1.6) на границе  $S$ . Для этого выделим малый участок  $\Omega$  вблизи границы  $S$  (рис. 17). Проинтегрируем уравнение (3.1) по выделенному участку при достаточно малом значении числового параметра  $\eta > 0$ . Напомним необходимую при дальнейших построениях формулу Гаусса — Остроградского

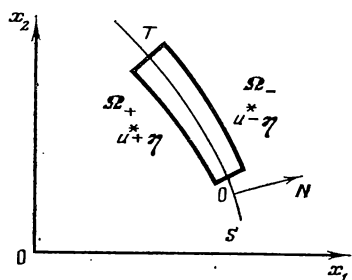


Рис. 17. Область интегрирования вблизи участка свободной границы  $S$

$$\int_{\Omega_+} \frac{\partial p}{\partial x_k} dx = \int_{\partial \Omega_+} p \cos(N, x_k) d\tau, \quad (3.2)$$

где  $N$  — внешняя нормаль к  $\partial \Omega_+$ .

Интегрирование уравнения (3.1) дает

$$\int_{u^* - \eta}^{u^* + \eta} \int_0^T Lu dx = - \int_{u^* - \eta}^{u^* + \eta} \int_0^T \psi(x) \delta(u - u^*) \frac{\partial u}{\partial N} dx. \quad (3.3)$$

Интеграл в правой части (3.3) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_{u^*-\eta}^{u^*+\eta} \int_0^T \psi(x) \delta(u-u^*) \frac{\partial u}{\partial N} dN d\tau = \\
& = \int_{u^*-\eta}^{u^*+\eta} \int_0^T \psi(x) \delta(u-u^*) du d\tau = \int_0^T \psi(x) d\tau,
\end{aligned} \quad (3.4)$$

так как для нашей области интегрирования  $dx = dN d\tau$  и на границе  $u(x) = u^*$  справедливо  $du = (\partial u / \partial N) dN$ .

Для левой части (3.3) имеем

$$\int_{u^*-\eta}^{u^*+\eta} \int_0^T Lu dx = I_1 + I_2. \quad (3.5)$$

При  $\eta \rightarrow 0$  для  $I_1$  с учетом формулы (3.2) получим

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{u^*-\eta}^{u^*+\eta} \int_0^T \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx = \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \left( a_{ij}(x, u^+) \frac{\partial u^+}{\partial x_j} \cos(N^+, x_i) \right) d\tau + \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \left( a_{ij}(x, u^-) \frac{\partial u^-}{\partial x_j} \cos(N^-, x_i) \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание то, что  $N^- = N$  и  $N^+ = -N$  (см. рис. 17), получим при  $\eta \rightarrow 0$  равенство

$$I_1 = - \int_0^T \left( \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_+ - \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_- \right) d\tau, \quad x \in S. \quad (3.6)$$

Из ограниченности решения  $u(x)$  и его первых производных при  $\eta \rightarrow 0$  вытекает

$$I_2 = \int_{u^*-\eta}^{u^*+\eta} \int_0^T a(x, u, Du) dx = 0. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.6), (3.7) в (3.5), получим при  $\eta \rightarrow 0$

$$\int_{u^*-\eta}^{u^*+\eta} \int_0^T Lu dx = - \int_0^T \left[ \frac{\partial u}{\partial v} \right] d\tau. \quad (3.8)$$

При подстановке (3.4) и (3.8) в (3.3) имеем

$$\int_0^T \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\tau = \int_0^T \psi(x) d\tau, \quad x \in S. \quad (3.9)$$

В силу произвольности участка  $(0, T)$  границы  $S$  из равенства (3.9) вытекает, что на границе  $S$  выполнены условия сопряжения (1.6).

Таким образом, показано, что вместо задачи (1.1)—(1.7) можно рассматривать эквивалентную ей (3.1), (1.7).

Уравнение (3.1) не совсем удобно для использования при приближенном решении поставленной задачи со свободной границей. Оно содержит в правой части нормальную производную от решения на неизвестной границе, что предполагает выделение этой границы и построение нормали к ней. Поэтому для уравнения (3.1) нельзя, вообще говоря, построить схему сквозного счета. Однако с учетом определения свободной границы согласно (1.3) и поведения решения при переходе  $S$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -|\nabla u|, \quad x \in S. \quad (3.10)$$

Равенство (3.10) позволяет записать уравнение (3.1) в более приемлемой форме:

$$Lu = \psi(x) \delta(u - u^*) \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad x \in \Omega, \quad (3.11)$$

так как

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$$

### 3.2. Сглаживание $\delta$ -функции

Численное решение уравнения (3.11) с условиями (1.7) на границе связано с тем или иным способом «размазывания»  $\delta$ -функции в правой части. Процедура сглаживания подробно рассмотрена в литературе, посвященной численному решению задач типа Стефана (см., например, [10, 11]). Поэтому мы не будем касаться здесь достаточно частных вопросов о выборе ширины интервала размазывания, выборе аппроксимационной формулы и т. д. Отметим лишь некоторые общие моменты.

Вместо (3.1) будем рассматривать уравнение

$$Lu_* = \psi(x) \delta_*(u_* - u^*) |\nabla u_*|, \quad x \in \Omega. \quad (3.12)$$

В простейшем случае

$$\delta_\varepsilon(u_\varepsilon - u^*) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |u_\varepsilon - u^*| \leq \varepsilon, \\ 0, & |u_\varepsilon - u^*| > \varepsilon. \end{cases} \quad (3.13)$$

В практических расчетах часто используется параболическая аппроксимация

$$\delta_\varepsilon(u_\varepsilon - u^*) = \begin{cases} \frac{3}{4\varepsilon} \left( 1 - \frac{(u_\varepsilon - u^*)^2}{\varepsilon^2} \right), & |u_\varepsilon - u^*| \leq \varepsilon, \\ 0, & |u_\varepsilon - u^*| > \varepsilon. \end{cases} \quad (3.14)$$

Следует заметить, что, как показывают численные эксперименты по решению задачи Стефана, точность приближенного решения слабо зависит от выбора той или иной аппроксимационной формулы для  $\delta$ -функции, в частности от выбора  $\delta_\varepsilon(u)$  в виде (3.13) или (3.14). Более существенное влияние оказывает ширина размазывания  $\varepsilon$ , которая в значительной степени определяется используемой расчетной сеткой.

### 3.3. Задачи типа Стефана

Задача Стефана (см. § 1 гл. I) имеет определенные особенности. В квазистационарном приближении функция  $\psi(x)$  в условии (1.6) имеет вид

$$\psi(x) = \psi_0(x) \cos(\mathbf{N}, l), \quad (3.15)$$

где  $l$  — некоторое заданное направление. В данном случае с учетом (1.3) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} \cos(\mathbf{N}, l). \quad (3.16)$$

Из (3.1), (3.15) и (3.16) следует

$$Lu = -\psi_0(x) \delta(u - u^*) \frac{\partial u}{\partial l}. \quad (3.17)$$

В задаче Стефана направление  $l$  определяется заданным вектором  $\mathbf{v}_0$ . Поэтому уравнение (3.17) переписывается в виде

$$Lu = -\psi_1(x) \delta(u - u^*) (\mathbf{v}_0 \nabla) u, \quad (3.18)$$

где

$$\psi_1(x) = \psi_0(x) / |\mathbf{v}_0|.$$

Таким образом, мы пришли к известной обобщенной формулировке задачи Стефана. В квазистационарном случае мы по-

дошли к этому с несколько более общих позиций, когда задача Стефана является частным случаем задач со свободной границей для эллиптического уравнения.

#### § 4. ПРИМЕР 1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

##### 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим в качестве примера применения метода аддитивного выделения особенности осесимметричную задачу Стефана, которая моделирует зонную плавку цилиндрического кристаллического стержня. Мимо источника тепла с постоянной скоростью  $v_0$  движется цилиндрический стержень (рис. 2, гл. I). Выделим участок стержня  $0 \leq x_2 \leq l_2$ , на котором сказывается влияние источника тепла, и будем считать, что на его боковых сторонах температура постоянна и равна температуре окружающей среды  $u_0$ . На плоскости  $(x_1, x_2)$  тепловой процесс с фазовым переходом из одного состояния вещества в другое описывается следующими безразмерными уравнениями (см. (1.1) — (1.5) гл. I):

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( x_1 k(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = \text{Pe} c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad (4.1)$$

$$[u] = 0, \quad \left[ k(u) \frac{\partial u}{\partial N} \right] = \text{Pe St} \cos(N, x_2), \quad x \in S, \quad (4.2)$$

где плотность и коэффициенты теплопроводности и теплоемкости предполагаются в общем случае зависящими от температуры и разрывными на границе фазового перехода  $S$ , где  $u(x) = u^*$ . На боковых сторонах

$$u(x_1, 0) = u_0, \quad u(x_1, l_2) = u_0. \quad (4.3)$$

На верхней границе при  $x_1 = 1$  задан поток тепла

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} = \text{Kг} Q(x_2), \quad x_1 = 1. \quad (4.4)$$

На оси выполнены условия

$$x_1 k(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0. \quad (4.5)$$

Определяющие безразмерные параметры  $\text{Pe}$ ,  $\text{St}$ ,  $\text{Kг}$  введены следующим образом:

$$\text{Pe} = |v_0| l_1 \frac{c_0 \rho_0}{k_0}, \quad \text{St} = \frac{\lambda}{c_0 \rho_0 u^*}, \quad \text{Kг} = \frac{Q_0 l_1}{k_0 u^*},$$

где  $k_0, c_0, \rho_0 = k, c, \rho(u^* + 0)$ . В безразмерных переменных расчетная область  $\Omega$  представляет собой прямоугольник

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < l_2\}.$$

#### 4.2. Метод решения

Для численного решения задачи (4.1) — (4.6) используем метод аддитивного выделения особенности, рассмотренный в § 2. Вводя преобразование Кирхгофа [126], для новой неизвестной функции

$$v(u) = \int_0^u k(\xi) d\xi$$

получим следующую краевую задачу:

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \text{Pe} \mu(v) \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad x \in \Omega, \quad (4.6)$$

$$[v] = 0, \quad \left[ \frac{\partial v}{\partial N} \right] = \text{Pe St} \cos(N, x_2), \quad x \in S(v = v^*), \quad (4.7)$$

$$v(x_1, 0) = \eta_0, \quad v(x_1, l_2) = \eta_0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \text{Kr} Q(x_2), \quad x_1 = 1, \quad (4.9)$$

$$x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0. \quad (4.10)$$

Здесь использованы обозначения

$$\mu(v) = \frac{c(u) \rho(u)}{k(u)}, \quad v^* = \int_0^1 k(\xi) d\xi, \quad \eta_0 = \int_0^{u_0} k(\xi) d\xi.$$

Будем искать решение задачи в виде

$$v(x) = w(x) + z(x), \quad (4.11)$$

где  $z(x)$  — потенциал простого слоя:

$$z(x) = \int_S \beta(y) G(x, y) d\tau, \quad (4.12)$$

здесь  $G(x, y)$  — фундаментальное решение уравнения Лапласа. В осесимметричном случае оно имеет вид

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} t \sqrt{\frac{y_1}{x_1}} K(t). \quad (4.13)$$

В (4.13) принято

$$t^2 = \frac{4x_1y_1}{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

а через  $K(t)$  обозначен полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - t^2 \sin^2 \varphi}}, \quad t^2 < 1.$$

С учетом свойств потенциала простого слоя (4.12), положив

$$\beta(x) = \text{Pe St} \cos(N, x_2), \quad (4.14)$$

удовлетворим условиям (4.7) на границе фазового перехода  $S$ . Функция  $w(x)$  не имеет особенностей в  $\Omega$  и является решением уравнения

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( x_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \text{Pe} \mu(w + z) \frac{\partial(w + z)}{\partial x_2}, \quad (4.15)$$

Из (4.8) — (4.10) вытекают краевые условия для уравнения (4.15)

$$w(x_1, 0) = \eta_0 - z(x_1, 0), \quad w(x_1, l_2) = \eta_0 - z(x_1, l_2), \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \text{Kг} Q(x_2) - \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad x_1 = 1, \quad (4.17)$$

$$x_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0. \quad (4.18)$$

### 4.3. Численная реализация метода

Для численного решения задачи (4.6) — (4.10) используем итерационный процесс последовательного уточнения неизвестной границы раздела фаз, который проводится в несколько этапов.

1) Пусть имеется  $k$ -е приближение для функции  $v(x)$  в области  $\Omega$ , причем  $v^0(x)$  задается достаточно произвольно. Соответствующее приближение для свободной границы обозначим через  $S^k$ , где

$$S^k = \{x | x \in \Omega, v^k(x) = v^*\}.$$

Тогда в соответствии с (4.12) имеем

$$z^k(x) = \int_{S^k} \beta^k(y) G(x, y) d\tau, \quad x \in \Omega, \quad (4.19)$$

где плотность потенциала определяется согласно (4.14).

2) Следующее  $(k+1)$ -е приближение для  $w^{k+1}(x)$  определим из решения линейной задачи

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( x_1 \frac{\partial w^{k+1}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial x_2^2} = \operatorname{Re} \mu(v^k) \frac{\partial(w^{k+1} + z^k)}{\partial x_2}, \quad (4.20)$$

$$w^{k+1}(x_1, 0) = \eta_0 - z^k(x_1, 0), \quad w^{k+1}(x_1, l_2) = \eta_0 - z^k(x_1, l_2), \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial w^{k+1}}{\partial x_1} = \operatorname{Kг} Q(x_2) - \frac{\partial z^k}{\partial x_1}, \quad x_1 = 1, \quad (4.22)$$

$$x_1 \frac{\partial w^{k+1}}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0, \quad (4.23)$$

которая получена из (4.15)—(4.18).

3) Положим

$$v^{k+1}(x) = w^{k+1}(x) + z^k(x), \quad x \in \Omega \quad (4.24)$$

и по этому приближению найдем  $(k+1)$ -е приближение для  $S$  и т. д.

Итерационный процесс (4.19)—(4.24) проводится до достижения необходимой точности  $\varepsilon$  в определении функции  $v(x)$ , а именно до выполнения условия

$$\max_{x \in \Omega} |v^{k+1}(x) - v^k(x)| < \varepsilon \max_{x \in \Omega} |v^k(x)|.$$

Задача (4.20)—(4.23) решается численно с использованием разностных методов. Используется внутренний итерационный процесс с обращением разностного оператора Лапласа с помощью прямого метода разделения переменных и быстрого преобразования Фурье [119]. Расчет границы раздела фаз проводится с помощью линейной интерполяции по значениям  $v(x)$  в узлах сетки. Процедура вычисления температуры  $u(x)$  по значениям вспомогательной функции  $v(x)$  в случае, когда  $k(u)$  — кусочно-постоянная функция с разрывом при  $u = u^*$ , не вызывает затруднений. В более общем случае расчет  $u$  осуществляется на каждой  $k$ -й итерации с помощью интерполяции по достаточно подробной таблице значений  $v(u_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , в предположении, что на каждом отрезке  $[u_i, u_{i+1}]$  коэффициент теплопроводности  $k(u)$  линеен.

#### 4.4. Результаты расчетов

В приведенных ниже примерах использованы следующие зависимости коэффициентов от температуры:

$$k(u) = \begin{cases} 0,6u + 0,4, & u < 1, \\ 1, & u \geq 1, \end{cases} \quad c(u) \rho(u) = \begin{cases} 0,15u + 0,63, & u < 1, \\ 1, & u \geq 1. \end{cases}$$

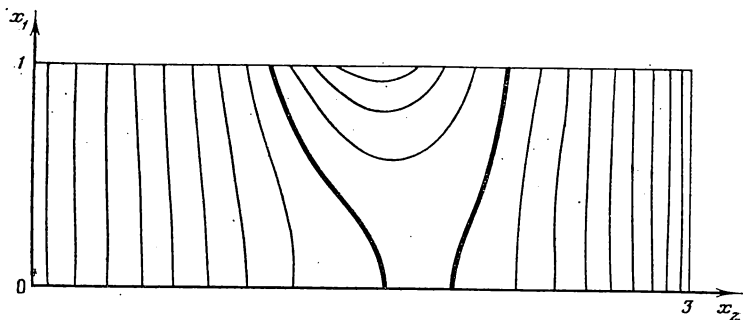


Рис. 18. Изотермы  $u=\text{const}$  для задачи Стефана с параметрами  $St=0,25$ ,  $Pe=0,5$ ,  $Kr=1$

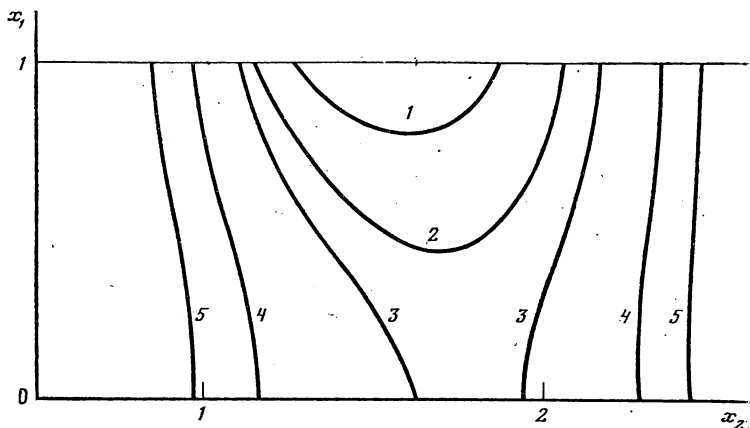


Рис. 19. Граница расплава при различных значениях числа Кирпичева  $Kr$  ( $St=0,25$ ,  $Pe=0,5$ ): 1 —  $Kr=0,75$ ; 2 — 0,9; 3 — 1; 4 — 1,25; 5 — 1,5

В граничных условиях (4.3), (4.4)  $u_0=0,15$ , а мощность теплового источника моделируется зависимостью

$$Q(x_2) = \left( 1 + \left( \frac{x_2 - x_2^0}{r_0} \right)^8 \right)^{-1/2},$$

причем  $x_2^0=0,5$ ,  $l_2, r_0=0,25$ .

Расчеты проводились на сетке  $(33 \times 33)$  в прямоугольнике  $\Omega'$  с  $l_2=3$ . Выбор такой величины  $l_2$  обусловлен необходимостью того, чтобы влияние боковых границ не сказывалось на изотерме плавления. Проведенные численные эксперименты показали быструю сходимость предложенного итерационного процесса и хорошую точность развиваемого метода на тестовых задачах.

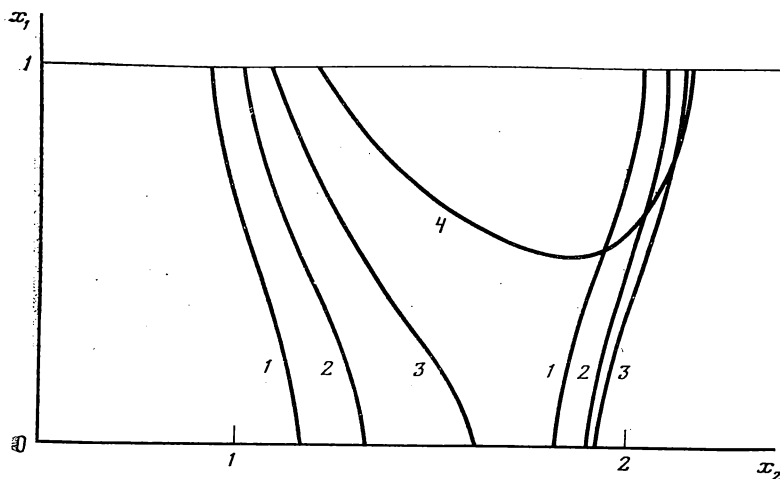


Рис. 20. Влияние числа Пекле на границу раздела фаз при  $St=0,25$ ,  $Kr=1$ : 1 —  $Pe=0$ ; 2 —  $0,25$ ; 3 —  $0,5$ ; 4 — 1

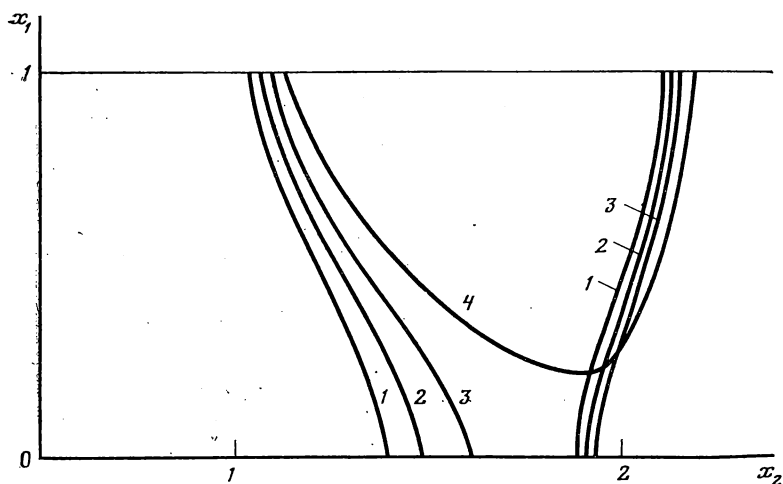


Рис. 21. Зависимость границы расплава от числа Стефана при  $Pe=0,5$ ,  $Kr=1$ : 1 —  $St=0$ ; 2 —  $0,125$ ; 3 —  $0,25$ ; 4 —  $0,5$

На рис. 18 изображены изотермы с шагом  $\delta u=0,1$  для основного варианта с  $Pe=0,5$ ,  $St=0,25$ ,  $Kr=1$ ; выделена граница раздела фаз. На рис. 19 нанесены изотермы плавления для задач с постоянными параметрами  $Pe=0,5$ ,  $St=0,25$  и с изменяющимся числом Кирпичева, характеризующим мощность теп-

лового источника. Уже при значении  $Kr=0,5$  расплавленная зона отсутствует.

Влияние числа Пекле проиллюстрировано на рис. 20. Заметим, что при увеличении  $Pe$ , что соответствует увеличению скорости движения стержня, область расплава уменьшается и смещается в сторону движения стержня. Аналогичную картину, хотя и менее выраженную, наблюдаем при изменении числа  $St$  (рис. 21). Некоторые дополнительные факты по решению задачи Стефана в квазистационарной постановке можно найти в работах [134, 135].

## ГЛАВА III

### ПЕРЕХОД К НОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

#### § 1. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

##### 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую простейшую одномерную задачу со свободной границей. На интервале  $(0, \xi)$ , где  $\xi$  — неизвестная граница, функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} k(x) \frac{du}{dx} - q(x)u = 0, \quad 0 < x < \xi, \quad (1.1)$$

где  $k(x) \geq k_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ . К уравнению (1.1) добавим граничное условие

$$u(0) = 0, \quad (1.2)$$

а на свободной границе

$$u(\xi) = u^*, \quad \frac{du}{dx}(\xi) = \lambda. \quad (1.3)$$

Предположим для определенности, что  $u^* > 0$ , и поэтому  $\lambda > 0$ . Качественное поведение решения отображено на рис. 22.

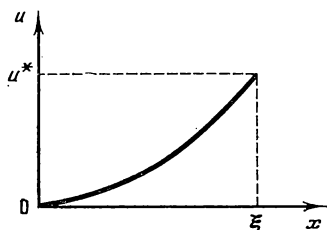


Рис. 22. Решение одномерной задачи со свободной границей (1.1)–(1.3)

##### 1.2. Преобразование Ландау

Естественным шагом при решении задачи (1.1)–(1.3) является замена переменных такая, чтобы в новых переменных расчетная область была фиксированной. Простейшая замена переменных этого класса носит название преобразования Ландау и имеет вид

$$x = \xi \eta. \quad (1.4)$$

Очевидно, что в этом случае  $\eta \in (0, 1)$ . Замена переменных

(1.4) в работах [17, 18], посвященных приближенному решению задач типа Стефана, носит название метода выпрямления фронтов. В силу (1.4) имеем

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\eta},$$

а уравнение (1.1) в новых переменных принимает вид

$$\frac{d}{d\eta} \left( k(\xi\eta) \frac{dv}{d\eta} \right) - q(\xi\eta) \xi^2 v = 0, \quad 0 < \eta < 1. \quad (1.5)$$

Условия (1.2), (1.3) записываются следующим образом:

$$v(0) = 0, \quad (1.6)$$

$$v(1) = u^*, \quad \frac{dv}{d\eta}(1) = \xi \lambda. \quad (1.7)$$

В (1.5)—(1.7) использованы обозначения  $v(\eta) = u(\xi\eta)$ . В задаче (1.5)—(1.7) присутствует неизвестный параметр  $\xi$ , который выбирается так, чтобы удовлетворить одновременно двум условиям (1.7) на правом конце. Для решения (1.5)—(1.7) можно использовать итерационный процесс последовательного уточнения неизвестного значения  $\xi$  (свободной границы). При известном  $\xi^k$  решается краевая задача

$$\frac{d}{d\eta} \left( k(\xi^k \eta) \frac{dv^k}{d\eta} \right) - q(\xi^k \eta) (\xi^k)^2 v^k = 0, \quad 0 < \eta < 1,$$

$$v^k(0) = 0, \quad v^k(1) = u^*.$$

Уточнение  $\xi$  проводится с использованием второго граничного условия (1.7):

$$\xi^{k+1} = \frac{1}{\lambda} \frac{dv^k}{d\eta}(1).$$

Такой итерационный процесс применяется при численном решении одномерных задач со свободной границей типа (1.1)—(1.3). Однако использование преобразования Ландау в двумерных задачах сопряжено со значительными вычислительными трудностями, что ведет к сравнительно нечастому его применению в практических расчетах.

### 1.3. Обращение переменных

Другой тип преобразований, которые фиксируют расчетную область в задачах со свободной границей, связан с тем, что зависимая переменная становится независимой. Поясним сказанное на примере задачи (1.1)—(1.3). В силу монотонности  $u(x)$

(см. рис. 22) функция  $x(u)$  будет однозначной. Поэтому в задаче (1.1)—(1.3) можно в качестве независимой переменной взять  $u$ . Тогда искомой функцией будет  $x(u)$ . О такой процедуре мы говорим как о методе обращения переменных — зависимость переменной стала независимой и наоборот. Такое название введено в работах [81, 82] при рассмотрении задач теории МГД-равновесия.

Если иметь в виду задачи большей размерности, то наиболее известным преобразованием такого типа следует считать преобразование годографа, введенное еще С. А. Чаплыгиным [136]. Преобразование годографа и близкое ему преобразование Лежандра широко используется при исследовании вопросов разрешимости и регулярности задач со свободной границей (см., например, [53]).

Запишем задачу для новой функции  $x(u)$ . Простые выкладки приводят к выражениям

$$\frac{du}{dx} = \left( \frac{dx}{du} \right)^{-1}, \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = - \left( \frac{dx}{du} \right)^{-3} \frac{d^2x}{du^2}. \quad (1.9)$$

Подстановка (1.8), (1.9) в (1.1) приводит к следующему квазилинейному уравнению:

$$k(x) \frac{d^2x}{du^2} - \frac{dk}{dx}(x) \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + q(x) u \left( \frac{dx}{du} \right)^3 = 0, \quad 0 < u < u^*. \quad (1.10)$$

Из (1.2) имеем

$$x(0) = 0, \quad (1.11)$$

а второе условие (1.3) дает

$$\frac{dx}{du}(u^*) = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.12)$$

Задача в новых переменных (1.10)—(1.12) характерна тем, что трудности со свободной границей трансформировались в нелинейность уравнения (1.10) для  $x(u)$ , хотя исходное уравнение (1.1) является линейным. Это плата за то, что в новых переменных расчетная область фиксирована. Далее мы остановимся на использовании метода обращения переменных в двумерных эллиптических задачах.

Для приближенного решения квазилинейной краевой задачи (1.10)—(1.12) можно использовать различные итерационные методы. Простейшая линеаризация связана с тем, что нелинейные коэффициенты в уравнении (1.10) берутся с предыдущей

итерации. Это значит, что для определения нового  $(k+1)$ -го приближения решается краевая задача

$$k(x^k) \frac{d^2 x^{k+1}}{du^2} - \left( \frac{dk}{dx}(x^k) \left( \frac{dx^k}{du} \right) - q(x^k) u \left( \frac{dx^k}{du} \right)^2 \right) \frac{dx^{k+1}}{du} = 0,$$

$$0 < u < u^*,$$

$$x^{k+1}(0) = 0,$$

$$\frac{dx^{k+1}}{du}(u^*) = \frac{1}{\lambda}.$$

Более быстрая сходимость достигается при применении метода Ньютона—Канторовича (метод квазилинеаризации) [119, 137, 138].

Вполне аналогично применяются новые переменные в задачах со свободной границей, когда дефект равен нулю. Мы не будем здесь останавливаться подробно на двухфазных задачах, ориентируя читателя на применение для задач с  $\kappa=2$  методов, основанных на переформулировке проблемы.

## § 2. НОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

### 2.1. Модельная задача Дирихле

Остановимся на описании достаточно общего подхода для решения определенного класса краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка, в том числе и задач со свободной границей. Суть метода состоит в переходе к новым независимым переменным, одна из которых является заданной функцией искомого решения: зависимая переменная стала независимой. Пример такого преобразования (обращение переменных) для одномерной задачи рассмотрен выше. Обратимся теперь к двумерным задачам. Прежде всего подчеркнем еще раз следующее. При переходе к новым переменным достигаются определенные преимущества, связанные с преобразованием сложных расчетных областей в более простые: с удобствами интерпретации результатов, повышением точности расчетов решений с особенностями и т. д. Эти достоинства в некотором смысле аналогичны тем, которые появляются в газовой динамике при формулировке задачи в лагранжевых координатах и ее численном исследовании [139, 140].

Рассмотрим квазилинейную задачу Дирихле в области  $\Omega$  (рис. 23). Пусть для определенности  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{2j} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x, u) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.1)$$

На границе  $\partial\Omega$  выполнено условие первого рода

$$u(x) = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

Область  $\Omega$  представлена нами в виде криволинейного четырехугольника. Поэтому более подробная запись принятых граничных условий (2.2) имеет вид

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad (2.3)$$

$$u(x) = u^*, \quad x \in \Gamma_2, \quad (2.4)$$

$$u(x) = \mu_1(x), \quad x \in \Gamma_3, \quad (2.5)$$

$$u(x) = \mu_2(x), \quad x \in \Gamma_4. \quad (2.6)$$

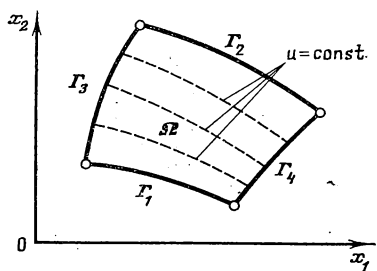


Рис. 23

Здесь  $u^* = \text{const} > 0$ , а функции  $\mu_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , монотонны от 0 до  $u^*$ . Сразу же заметим, что описываемый ниже подход может применяться и к несколько другим задачам, чем (2.1) — (2.6).

Предположим, что решение  $u(x)$  задачи (2.1) — (2.6) не имеет экстремумов внутри  $\Omega$ . В частности, это условие будет выполнено при справедливости принципа максимума для уравнения (2.1), т. е. при некоторых ограничениях на коэффициенты  $a_0(x, u)$ ,  $a_{ij}(x, u)$ . В этом случае изолинии  $u(x) = \text{const}$  не пересекаются друг с другом (см. качественное поведение решения на рис. 23). Поэтому существует другая функция  $\theta(x)$  такая, что  $u(x) = \text{const}$  и изолинии  $\theta(x) = \text{const}$  образуют сетку, состоящую из криволинейных четырехугольников, покрывающую расчетную область  $\Omega$ . Формально это означает, что существует  $\theta$  такая, что преобразование

$$(x_1, x_2) \rightarrow (u, \theta)$$

будет невырожденным.

## 2.2. Обращение переменных

Выберем в качестве новых независимых переменных функцию  $\eta = \eta(u)$  и  $\theta$ , где  $\eta(u)$  — монотонная функция. Предположим, что

$$\eta'(0) = 0, \quad \eta(u^*) = \eta^*. \quad (2.7)$$

Переформулируем исходную задачу (2.1) — (2.6) в переменных

$(\eta, \theta)$ , пока не конкретизируя выбор  $\theta(x')$ . Неизвестными теперь являются функции

$$x_i = x_i(\eta, \theta), \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

В силу невырожденности преобразования (2.8) определитель перехода

$$J = \frac{D(x_1, x_2)}{D(\eta, \theta)} = \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \quad (2.9)$$

отличен от нуля. В этом случае существует обратное преобразование, якобиан которого равен

$$J^{-1} = \frac{D(\eta, \theta)}{D(x_1, x_2)} = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_1}.$$

Получим формальные соотношения для перехода от переменных  $(x_1, x_2)$  к переменным  $(\eta, \theta)$ . Для этого продифференцируем (2.8) по  $x_1$  и  $x_2$ , получим

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \quad 0 = \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \\ 0 &= \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \quad 1 = \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10), выразив первые производные  $x_1$  и  $x_2$  по  $\eta$  и  $\theta$ , найдем следующие основные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} &= J \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \eta} = -J \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta} &= -J \frac{\partial \eta}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = J \frac{\partial \eta}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Соотношения (2.11) легко получаются исходя из свойств якобианов, например,

$$\frac{\partial x_2}{\partial \eta} = \frac{D(x_2, x_1)}{D(\eta, \theta)} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\frac{D(x_1, x_2)}{D(\eta, \theta)} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -J \frac{\partial \theta}{\partial x_1}.$$

Из (2.11) следуют выражения для первых производных функции  $u(x)$ . Действительно с учетом  $\eta = \eta(u)$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{du}{d\eta} J^{-1} \frac{\partial x_2}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{du}{d\eta} J^{-1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta}. \quad (2.12)$$

Используя (2.12), приходим к выражению для членов, входящих в уравнение (2.1). Для произвольной функции  $\Phi(\eta, \theta)$  имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \left( \Phi \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^{-1} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left( \Phi \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^{-1} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Phi \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^{-1} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Phi \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^{-1} - \\
&- \Phi \frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta \partial \theta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^{-1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^{-1} \right). \quad (2.13)
\end{aligned}$$

С учетом (2.11) из (2.13) получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Phi \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Phi \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right). \quad (2.14)$$

В частности, для  $\Phi = \frac{\partial u}{\partial x_1}$  из (2.14) следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} \frac{du}{d\eta} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \right) - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{J} \frac{du}{d\eta} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \right). \quad (2.15)$$

Аналогично выражаются и другие производные, входящие в уравнение (2.1). Окончательно находим

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( q_{11} \frac{du}{d\eta} J^{-1} \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( q_{12} \frac{du}{d\eta} J^{-1} \right) + a_0(x, u) = 0, \quad (2.16)$$

здесь

$$q_{11} = a_{11} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + a_{22} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2, \quad (2.17)$$

$$q_{12} = -a_{11} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} - a_{12} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right) - a_{22} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \quad (2.17)$$

при условии, что  $a_{12} = a_{21}$  в (2.17).

### 2.3. Отображение областей

Пусть  $\theta(x) = \text{const}$  на  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ . Тогда расчетная область  $\Omega$  в переменных  $(\eta, \theta)$  будет прямоугольником

$$\Omega' = (0, \eta^*) \times (\theta_{\min}, \theta_{\max})$$

при условии, что  $\theta(x)$  монотонно изменяется на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

В этом и состоит смысл обращения переменных. Без конкретизации выбора  $\theta(x)$  нельзя сформулировать граничные условия в новых переменных. Для некоторых случаев полная формулировка задач в новых переменных будет рассмотрена ниже.

### § 3. КОНКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ОБРАЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

#### 3.1. Ортогональные координаты

Укажем теперь некоторые возможные способы выбора вспомогательной переменной. Они не в одинаковой степени пригодны для решения задач со свободной границей с нулевым дефектом и задач с дефектом, равным двум. Преимущество того или иного варианта выбора  $\theta(x)$  проявляется в задачах определенных классов. Не представляется возможным указать какой-либо универсальный подход, особенно если иметь в виду и более сложные задачи, чем задача (2.1) — (2.6).

Следует специально отметить чрезвычайно важную роль разработки эффективных способов численных реализаций метода обращения переменных при конкретном выборе  $\theta(x)$ . Задачи в новых переменных являются нелинейными, поэтому построение вычислительного алгоритма представляет значительные сложности. Не останавливаясь на этих вопросах, столь важных с точки зрения практического применения методов описываемого класса, коротко опишем варианты выбора вспомогательной переменной  $\theta(x)$ , которые встречаются в вычислительной практике.

Начнем с простейшего случая, когда  $\eta(x)$  и  $\theta(x)$  ортогональны. Запишем условие ортогональности в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0. \quad (3.1)$$

Условие (3.1) будет выполнено для любой знакопостоянной функции  $\rho(\eta, \theta)$ , для которой справедливы соотношения

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = -\rho \frac{\partial \theta}{\partial x_1}. \quad (3.2)$$

Выберем  $\rho(\eta, \theta)$  в (3.2) так, чтобы  $u(x)$  удовлетворяла уравнению (2.1). В новых переменных  $(\eta, \theta)$  получим уравнение (2.16). Будем его рассматривать как уравнение для функции  $\rho(\eta, \theta)$ . Выразим  $\rho(\eta, \theta)$  через якобиан, присутствующий в уравнении (2.16). С учетом (3.2) имеем

$$\rho = J \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 \right). \quad (3.3)$$

Используя соотношение (3.1), из (3.3) получим

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 = \frac{1}{J} \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \right). \quad (3.4)$$

Подстановка (3.4) в (3.3) дает искомую связь

$$\rho = J^{-1} \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \right). \quad (3.5)$$

Из (3.5) и (2.16) найдем следующее уравнение для  $\rho(\eta, \theta)$ :

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial \eta} \left( q_{11} \frac{du}{d\eta} \rho \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \right) + \\ & + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} \left( q_{12} \frac{du}{d\eta} \rho \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \right) + \\ & + \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \right) a_0(x, u) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для важного частного случая

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad (3.7)$$

с учетом (2.17) и условия ортогональности  $\eta$  и  $\theta$  из (3.7) вытекает

$$\rho \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{du}{d\eta} \rho \right) + \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \right) a_0(x, u) = 0. \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что при  $a_0(x, u) = 0$ , т. е. если (2.1) — уравнение Лапласа, то

$$\rho(\eta, \theta) = \rho_0(\theta). \quad (3.9)$$

Получим уравнения для новых неизвестных  $x_i(\eta, \theta)$ ,  $i=1, 2$ . Обращая в (3.2) переменные, приходим к

$$\rho \frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \frac{\partial x_2}{\partial \theta}, \quad \rho \frac{\partial x_2}{\partial \eta} = -\frac{\partial x_1}{\partial \theta}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим теперь граничные условия для обобщенной системы уравнений Коши—Римана (3.10) и уравнения (3.6). Положить  $\theta = \theta_{\min}$  на  $\Gamma_3$  и  $\theta = \theta_{\max}$  на  $\Gamma_4$  в общем случае мы не можем. Поэтому область применимости ортогональных координат  $(\eta, \theta)$  достаточно узка. Но есть класс областей, где такие координаты удобно применять. Этот класс включает в себя двухсвязные области (рис. 24). В этом случае  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  явно не выделяются, а существование  $\theta(x)$ , ортогональной к искомому решению, не вызывает сомнений.

В силу задания  $\theta$  на  $\Gamma_1$  получим граничные условия

$$x_i(0, \theta) = x_i^0(\theta), \quad i=1, 2. \quad (3.11)$$

Принимая во внимание (3.10), необходимые условия для  $\rho(\eta, \theta)$  запишем в виде

$$\rho(\eta, \theta) = \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \right) \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2 \right)^{-1}, \quad \eta = 0. \quad (3.12)$$

Их можно рассматривать как начальные для уравнения (3.6). Появление граничного условия (3.12), связывающего  $x_i(\eta, \theta)$ ,  $i=1, 2$  и  $\rho(\eta, \theta)$ , обусловлено тем, что для постановки краевой задачи для системы уравнений (3.10) необходимо не два условия, как в (3.11), а лишь одно.

В случае двухсвязной области  $\Omega$  по переменной  $\theta$  ставятся условия периодичности

$$x_i(\eta, \theta + \theta_p) = x_i(\eta, \theta), \quad i=1, 2, \quad (3.13)$$

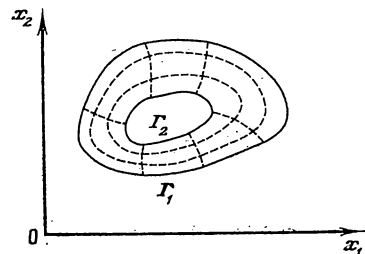


Рис. 24. Ортогональные координаты

где  $\theta_p = \theta_{\max} - \theta_{\min}$ . На внешней границе  $\Gamma_2$  (рис. 24) запишем уравнение контура в виде

$$f_2(x_1(\eta^*, \theta), x_2(\eta^*, \theta)) = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом, сформулирована задача в новых ортогональных переменных  $(\eta, \theta)$  вида (3.6), (3.10)—(3.14). Очень важный вопрос состоит в том, как численно решать задачу в обращенных переменных. Даже при постановке стандартных краевых условий для системы уравнений типа Коши—Римана имеются сложности при построении вычислительных алгоритмов решения таких задач (см. обсуждение таких вопросов в [141]). Можно перейти от (3.10) к двум эллиптическим уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \rho \frac{\partial x_i}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} = 0, \quad i=1, 2. \quad (3.15)$$

Тогда для эквивалентности (3.15) и (3.10) необходимо добиваться выполнения условий ортогональности (3.10), например, на границе расчетной области. Другими словами, граничные условия для системы эллиптических уравнений должны быть согласованы с (3.10).

В случае уравнения Лапласа, т. е. при выполнении (3.7)—(3.9), можно вообще не решать уравнения для  $\rho(\eta, \theta)$ , а положить его равным единице во всей области. Тогда (3.15) представляют собой уравнения Лапласа, а  $\eta$  и  $\theta$  — сопряженные гармонические функции. В этом случае условие (3.11) заменяется на условие типа (3.14):

$$f_1(x_1(0, \theta), x_2(0, \theta)) = 0. \quad (3.16)$$

Таким образом, проблема расщепления условий для неизвестных  $x_i(\eta, \theta)$ ,  $i=1, 2$ , встает не только на  $\Gamma_2$ , но и на  $\Gamma_1$ . Заметим, что речь в данном случае идет о построении конформного отображения области  $\Omega$  на прямоугольник  $\Omega'$ . Более общая задача, сформулированная нами для уравнений (3.6), (3.10), представляет, по существу, некое обобщение задачи построения конформного отображения. Задача конформного отображения широко обсуждается в литературе. Укажем лишь некоторые работы в этом направлении [142—144]. Приходится констатировать, что в настоящее время не имеется эффективных универсальных вычислительных алгоритмов решения задачи конформного отображения. Это тем более относится к поставленной задаче (3.6), (3.10)—(3.14).

### 3.2. Выбор второй переменной, являющейся решением краевой задачи

Как мы видели ранее, основные трудности для новых неизвестных  $x_i(\eta, \theta)$ ,  $i=1, 2$ , порождаются граничными условиями на  $\partial\Omega'$ . Эти трудности обусловлены требованием ортогональности  $\eta$  и  $\theta$ . Если отказаться от условия ортогональности, то можно построить варианты обращенных переменных, более удобные для численной реализации. Выберем  $\theta(x)$  так, чтобы она удовлетворяла некоторому эллиптическому уравнению, аналогичному исходному (2.1). На  $\theta(x)$  наложим граничные условия

$$\theta(x) = \theta_0(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.17)$$

Более подробная запись общих условий (3.17) применительно к рассматриваемой задаче (2.1)—(2.6) имеет вид

$$\theta(x) = \theta_{\min}, \quad x \in \Gamma_3, \quad (3.18)$$

$$\theta(x) = \theta_{\max}, \quad x \in \Gamma_4, \quad (3.19)$$

$$\theta(x) = \lambda_1(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (3.20)$$

$$\theta(x) = \lambda_2(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (3.21)$$

где  $\lambda_i(x)$ ,  $i=1, 2$ , — монотонно возрастают на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  от  $\theta_{\min}$  до  $\theta_{\max}$ . Пусть  $\theta(x)$  удовлетворяет в  $\Omega$  уравнению

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b_{ij}(x, u, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + b_0(x, u, \theta) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.22)$$

при условии, что введенная таким образом функция обеспечивает невырожденность преобразования  $(x_1, x_2) \rightarrow (\eta, \theta)$ .

Для того чтобы переформулировать задачу (2.1)–(2.6), (3.18)–(3.22) в новых переменных  $(\eta, \theta)$ , необходимо выписать вторые производные  $u(x)$  и  $\theta(x)$  по  $x_1$  и  $x_2$ . Например, для  $\partial^2 \eta / \partial x_1^2$  имеем

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_1}. \quad (3.23)$$

С учетом (2.9) и (2.11) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} = & -\frac{1}{J^2} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \left( \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta \partial \theta} + \right. \right. \\ & + \left. \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \left( \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta \partial \theta} + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} \right) \Bigg). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Равенство (3.24) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} = & -\frac{1}{J^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left( \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta \partial \theta} + \right. \right. \\ & + \left. \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \left( \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta \partial \theta} + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} \right) \Bigg). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Производная  $\partial^2 \eta / \partial x_2^2$  находится аналогично:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} = & -\frac{1}{J^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta \partial \theta} + \right. \right. \\ & + \left. \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta \partial \theta} + \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} \right) \Bigg). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Заменой  $\eta$  на  $\theta$  в (3.25), (3.26) получаются выражения для  $\partial^2 \theta / \partial x_1^2$  и  $\partial^2 \theta / \partial x_2^2$ .

Чтобы представить себе, к чему мы приходим после проведения такого рода выкладок, запишем окончательный результат для простейшего случая

$$a_{ij} = b_{ij} = \delta_{ij}, \quad a_0 = b_0 = 0,$$

т. е.  $u(x)$  и  $\theta(x)$  удовлетворяют уравнению Лапласа. При выборе  $\eta = u$  получим

$$\mathcal{L}x_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.27)$$

В (3.27) эллиптический оператор  $\mathcal{L}$  имеет вид

$$\mathcal{L}v = g_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \theta} + g_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2},$$

где нелинейные коэффициенты даются выражениями

$$g_{11} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$g_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta},$$

$$g_{22} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2.$$

Такая ситуация характерна и в более общем случае. При переходе к новым переменным  $(\eta, \theta)$  в уравнениях (2.1), (3.22) получим нелинейную систему эллиптических уравнений, которая сложнее системы уравнений (3.6), (3.10) в случае ортогональных координат. Но в данном случае краевые условия как для односвязной области  $\Omega$ , так и для двухсвязной выписываются просто. Из (3.18) — (3.21) и (2.3) — (2.6) получим граничные условия первого рода для новых неизвестных  $x_i(\eta, \theta)$ ,  $i = 1, 2$ . За простоту расчетной области и граничных условий приходится платить сложностью уравнений.

Использование переменных  $(\eta, \theta)$ , подобно рассмотренным здесь, широко используется в вычислительной гидродинамике при проведении расчетов на подвижных, адаптирующихся к решению криволинейных сеток. Состояние этого вопроса достаточно полно освещается, например, в работах [140, 145].

### 3.3. Явное задание вспомогательной функции

Рассмотрим еще один практически важный случай обращенных переменных  $(\eta, \theta)$ , когда линии уровня  $\theta(x) = \text{const}$  можно указать явно. Предположим, например, что части границы  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  (см. рис. 23) суть отрезки прямых. Тогда линии уровня  $\theta(x) = \text{const}$  можно взять в виде прямых, соединяющих точки границы  $\Gamma_1$  с точками  $\Gamma_2$ . Пусть  $x_i^1(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ , — заданные координаты границы  $\Gamma_1$ , а  $x_i^2(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ , — границы  $\Gamma_2$ . Тогда  $x_i(\eta, \theta)$  определим следующим образом:

$$x_i(\eta, \theta) = x_i^1(\theta) + \rho(\eta, \theta) (x_i^2(\theta) - x_i^1(\theta)), \quad i = 1, 2. \quad (3.28)$$

Здесь  $\rho(\eta, \theta)$  — неизвестная функция, которая дополняется очевидными условиями

$$\rho(0, \theta) = 0, \quad \rho(\eta^*, \theta) = 1. \quad (3.29)$$

Для того чтобы выписать уравнение для неизвестной функции  $\rho(\eta, \theta)$ , воспользуемся общим соотношением (2.16). Для этого достаточно найти связь между  $\rho(\eta, \theta)$  и якобианом  $J$ . Из (3.28) имеем

$$\frac{\partial x_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} (x_i^2(\theta) - x_i^1(\theta)), \quad i = 1, 2, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} &= \frac{\partial \rho}{\partial \theta} (x_i^2(\theta) - x_i^1(\theta)) + \\ &+ \rho \left( \frac{dx_i^2}{d\theta}(\theta) - \frac{dx_i^1}{d\theta}(\theta) \right) + \frac{dx_i^1}{d\theta}(\theta), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подставляя (3.30), (3.31) в (2.9), получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \rho}{\partial \eta} (\rho (x_1^2(\theta) - x_1^1(\theta)) \left( \frac{dx_2^2}{d\theta}(\theta) - \frac{dx_2^1}{d\theta}(\theta) \right) - \\ &- \rho (x_2^2(\theta) - x_2^1(\theta)) \left( \frac{dx_1^2}{d\theta}(\theta) - \frac{dx_1^1}{d\theta}(\theta) \right) + \\ &+ \frac{dx_2^1}{d\theta}(\theta) (x_1^2(\theta) - x_1^1(\theta)) - \frac{dx_1^1}{d\theta}(\theta) (x_2^2(\theta) - x_2^1(\theta))). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Подставляя теперь (3.32) в уравнение (2.16), получим искомое уравнение для  $\rho(\eta, \theta)$ , которое должно решаться с граничными условиями (3.29).

Отметим еще одну возможность явного задания вспомогательной переменной, которая также не приводит к увеличению числа уравнений. Речь идет о переменных Мизеса, для которых линии уровня  $\theta(x) = \text{const}$  параллельны. Пусть, например,  $\theta = x_1$  и неизвестной функцией является  $x_2(\eta, x_1)$ . Выпишем уравнение для  $x_2(\eta, x_1)$  в случае, когда (2.1) является уравнением Лапласа. Якобиан рассматриваемого преобразования имеет вид

$$J = \frac{D(x_1, x_2)}{D(\eta, x_1)} = -\frac{\partial x_2}{\partial \eta}. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в основное уравнение (2.16) с коэффициентами (2.17), получим искомое уравнение. При  $\eta = u$  имеем следующее уравнение для определения  $x_2(u, x_1)$ :

$$\left( 1 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial x_1} + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial x_1^2}. \quad (3.34)$$

Граничные условия для уравнения (3.34) легко получаются из исходных (2.3)—(2.6) с учетом того, что в данном случае  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  — участки прямых, параллельных оси  $x_2$ . Нет необходимости останавливаться на этом более подробно.

Выбор вспомогательной переменной  $\theta$  согласно (3.28) применялся в работах [78, 146], посвященных некоторым задачам физики плазмы. В [146] рассматривается решение задачи с нулевым дефектом (разрывной нелинейной правой частью). Детали вычислительного алгоритма можно найти в [147]. Задача в двухсвязной области рассматривается в [78].

Переменные Мизеса [148] часто используются при исследовании вопросов однозначной разрешимости задач со свободной границей. Применительно к задачам фильтрации через дамбы такая техника используется, например, в [34].

## § 4. ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

### 4.1. Постановка задачи

В отличие от рассматриваемой ранее краевой задачи Дирихле (2.1)—(2.6) будем иметь дело с задачей, когда часть границы, например  $\Gamma_2$ , неизвестна. Поставим кроме (2.4) еще одно условие на  $\Gamma_2$ :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (4.1)$$

Особенности применения метода обращения переменных к задаче со свободной границей проявляются в постановке граничных условий на ней. Именно этот вопрос мы здесь и обсудим.

### 4.2. Ортогональные координаты

Сформулируем граничные условия (2.4), (4.1) на свободной границе  $\Gamma_2$  в новых переменных. Из (2.4) и (4.1) следует

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \psi^2(\bar{x}), \quad x \in \Gamma_2. \quad (4.2)$$

Из общих соотношений (2.11) для производных  $\eta$  по  $x_1$  и  $x_2$  получим ( $\eta = \eta(u)$ )

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 J^{-2} \left( \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta}\right)^2 \right). \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.2), приходим к следующему соотношению на  $\Gamma_2$ :

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta}\right)^2 = J^2 \left(\frac{du}{d\eta}\right)^{-2} \psi^2(x), \quad \eta = \eta^*. \quad (4.4)$$

Дополним (4.4) условием ортогональности  $\eta$  и  $\theta$  в форме

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = 0. \quad (4.5)$$

Разрешая систему уравнений (4.4), (4.5) относительно  $\frac{\partial x_1}{\partial \eta}$  и  $\frac{\partial x_2}{\partial \eta}$ , получим

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 (J\psi^2)^{-1} \frac{\partial x_2}{\partial \theta}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \eta} = -\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 (J\psi^2)^{-1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta}, \quad \eta = \eta^*. \quad (4.7)$$

Условия (4.6), (4.7) при  $\eta = \eta^*$  удобно (см. (1.12) в одномерной задаче) рассматривать как условия второго рода для уравнений (3.15).

#### 4.3. Выбор $\theta$ , удовлетворяющей эллиптическому уравнению

В п. 3.2 указан вариант обращения переменных, для которого вспомогательная переменная определяется из решения краевой задачи для эллиптического уравнения. В задаче со свободной границей (2.1)—(2.6) при таком выборе  $\theta$  на  $\Gamma_2$  нельзя уже ставить граничное условие первого рода для  $x_i(\eta, \theta)$ ,  $i=1, 2$ . Заменим его на условие ортогональности  $\eta$  и  $\theta$  на  $\Gamma_2$ , т. е. в исходной задаче (3.18)—(3.22) для  $\theta$  вместо (3.21) используем условие ортогональности  $\eta$  и  $\theta$ . Тогда проходят те же рассуждения, что и при рассмотрении ортогональных координат. Поэтому на свободной границе в новых переменных  $\eta$  и  $\theta$ , где  $\theta(x)$  удовлетворяет уравнению (3.22), граничным условиям (3.18) — (3.20) и

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad (4.8)$$

выполнены граничные условия (4.6), (4.7).

#### 4.4. Третий выбор вспомогательной переменной

При введении вспомогательной переменной  $\theta$  так, чтобы были выполнены соотношения (3.28), существенно используется факт задания границы  $\Gamma_2$ . Это не позволяет перейти непо-

средственно к задачам со свободной границей. Здесь можно лишь указать на возможность итерационного уточнения неизвестной границы  $\Gamma_2$ . При использовании представления (3.28) речь идет об уточнении функций  $x_i^2(\theta)$ ,  $i=1, 2$ . Мы не будем здесь описывать какую-либо конструкцию вычислительного алгоритма решения задачи со свободной границей с дефектом, равным двум, при использовании координат (3.28).

При применении переменных Мизеса для задачи типа (3.18)—(3.20), (3.22), (4.1) для формулировки условий на свободной границе можно использовать граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \psi(x) \cos(N, x_2), \quad x \in \Gamma_2, \quad (4.9)$$

которое вытекает из (4.1) и (2.4). Используя (4.9) для задачи в обращенных переменных типа (3.34), получим граничное условие второго рода

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = (\psi(x) \cos(N, x_2))^{-1}, \quad u = u^*. \quad (4.10)$$

Краевое условие (4.10) не очень удобно для численной реализации, так как требует аккуратного построения свободной границы для вычисления  $\cos(N, x_2)$ .

Естественно, что указанные варианты обращения переменных не могут исчерпать все множество методов, построенных на общей идее замены зависимых и независимых переменных. Здесь отражены лишь те, которые в известной мере отражают взгляд самого автора на проблематику и его интересы.

Ортогональные обращенные переменные предложены в работе [82] и достаточно широко применялись при решении задач равновесия плазмы (задачи с нелинейной разрывной правой частью [149, 150]). Неортогональные координаты с функцией  $\theta(x)$ , удовлетворяющей эллиптическому уравнению, в тех же задачах использовались в работах [81, 89, 151] (см. следующий параграф). Координаты с  $\theta(x)$ , определяемой (3.28), рассматривались в уже цитированных работах [146, 147]. Переменные Мизеса очень часто применяются при численном решении задач со свободной границей. Помимо уже отмеченных работ [38, 39] обратим также внимание на [152, 153].

## § 5. ПРИМЕР 2. ЭВОЛЮЦИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ С ПОВЕРХНОСТНЫМ ТОКОМ

### 5.1. Постановка задачи

В качестве примера приложения метода обращения переменных для решения задач со свободной границей рассмотрим задачу эволюции идеальной плазмы с поверхностным током

[89, 151, 154]. Предполагается, что весь электрический ток сосредоточен на границе плазменного шнура, положение которой неизвестно и находится в процессе решения. Другими методами эта задача решалась в работах [88, 155].

Пусть плазма с постоянным давлением  $p$  занимает область  $\Omega_-$  с границей плазма—вакуум  $S$ . В двухсвязной вакуумной области  $\Omega_+$  равновесное магнитное поле в аксиально-симметричных плазменных конфигурациях описывается (см. п. 1.6 гл. I) уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega_+. \quad (5.1)$$

Функция потока  $u$  определена с точностью до постоянного слагаемого и принимает постоянные значения на внешней границе  $\Gamma_+$  (идеально проводящий кожух) и на  $S$ . Положим

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_+, \quad (5.2)$$

$$u(x) = u^*, \quad x \in S. \quad (5.3)$$

Дополним (5.3) еще одним краевым условием на свободной границе  $S$ . Это условие вытекает из баланса полных (газодинамических и магнитных) давлений и имеет вид [89, 154]

$$\left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 = 2px_1^2 + f_1^2 - f_0^2, \quad x \in S. \quad (5.4)$$

Здесь  $f_1, f_0$  — постоянные, причем  $f_0$  задается, а величина  $f_1$  в рассматриваемых задачах эволюции определяется заданным потоком  $\Phi$  продольного магнитного поля внутри плазменного шнура:

$$f_1 = \Phi \left( \int_{\Omega_-} \frac{1}{x_1} dx \right)^{-1}. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.1) с условиями (5.2)—(5.5) полностью определяет равновесие плазменного шнура с поверхностным током внутри идеально проводящего кожуха  $\Gamma_+$ .

## 5.2. Формулировка задачи в новых переменных

Для численного решения поставленной задачи используем преобразование переменных  $(x_1, x_2) \rightarrow (\eta, \theta)$ ,  $\eta = u$ , где функция  $\theta$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega_+. \quad (5.6)$$

Задача в обращенных переменных (см. п. 3.2 и п. 4.3) выглядит

следующим образом. Новые неизвестные  $x_i(u, \theta)$ ,  $i=1, 2$ , удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{L}x_1 + \frac{J^2}{x_1} = 0 \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L}x_2 = 0, (u, \theta) \in \Omega'_+ = (0, u^*) \times (\theta_{\min}, \theta_{\max}), \quad (5.8)$$

где эллиптический оператор  $\mathcal{L}$  определен в (3.27). Поскольку  $\theta(x)$  монотонно возрастает при обходе контура  $\Gamma_+$ , то при  $u=0$  неизвестные  $x_i(u, \theta)$ ,  $i=1, 2$ , удовлетворяют условиям первого рода

$$x_i(0, \theta) = x_i^0(\theta), i=1, 2. \quad (5.9)$$

По переменной  $\theta$  выполнены условия периодичности с периодом  $\theta_p = \theta_{\max} - \theta_{\min}$ :

$$x_i(u, \theta + \theta_p) = x_i(u, \theta), i=1, 2. \quad (5.10)$$

На неизвестной границе  $S$  (при  $u=u^*$ ) граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x_2}{\partial \theta} (J(2px_1^2 + f_1^2 - f_0^2))^{-1}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = -\frac{\partial x_1}{\partial \theta} (J(2px_1^2 + f_1^2 - f_0^2))^{-1}, u = u^*. \quad (5.12)$$

Таким образом, ставится задача (5.7)–(5.12) в новых переменных. Отметим, что выбор уравнения (5.6) для функции  $\theta$  является вполне оправданным. Другая возможность, когда

$$\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0, x \in \Omega_+,$$

навязана ортогональными координатами (см. п. 3.1).

### 5.3. Вычислительный алгоритм

Исходная задача со свободной границей (5.1)–(5.5) сформулирована в обращенных переменных  $(u, \theta)$  в виде двух эллиптических уравнений (5.7), (5.8) с краевыми условиями (5.9)–(5.12). В такой формулировке она не содержит неизвестной границы и ее решение определено в заданном прямоугольнике  $\Omega'_+$ . Это обстоятельство позволяет построить эффективный вычислительный алгоритм.

Остановимся на некоторых моментах, связанных с численным решением (5.7)–(5.12) разностными методами. В области  $\Omega'_+$  введем равномерную по каждому направлению прямоугольную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{(u, \theta) = (u_i, \theta_j), u_i = ih_u, i = 0, 1, \dots, N_1, N_1 h_u = u^*, \\ \theta_j = \theta_{\min} + jh_\theta, j = 0, 1, \dots, N_2, N_2 h_\theta = \theta_p\}.$$

Уравнения (5.7), (5.8) аппроксимируем на сетке  $\omega_h$  разностными уравнениями

$$\Delta x_1^h + \frac{I^2}{x_1^h} = 0, \quad (5.13)$$

$$\Delta x_2^h = 0, \quad (5.14)$$

где с учетом (3.27)

$$\Delta y = q_{22} y_{uu}^- - 2q_{12} y_{u\theta}^0 + q_{11} y_{\theta\theta}^-. \quad (5.15)$$

Коэффициенты  $q_{11}$ ,  $q_{12}$ ,  $q_{22}$ ,  $I$  во внутренних узлах сетки  $\omega_h$  аппроксимируются с помощью центральных разностей:

$$q_{11} = (x_{1u}^h)^2 + (x_{2u}^h)^2, \quad q_{22} = (x_{1\theta}^h)^2 + (x_{2\theta}^h)^2,$$

$$q_{12} = x_{1u}^h x_{1\theta}^h + x_{2u}^h x_{2\theta}^h, \quad I = x_{1u}^h x_{1\theta}^h - x_{1\theta}^h x_{2u}^h.$$

Здесь использованы стандартные безындексные обозначения теории разностных схем. [124]. При  $u=0$  первые производные по  $u$  в коэффициентах  $q_{11}$ ,  $q_{12}$ ,  $q_{22}$ ,  $I$  и смешанных производных в уравнениях (5.13), (5.14) аппроксимируются соответствующими односторонними разностями. Краевые условия (5.11), (5.12) рассматриваются как условия второго рода и с помощью уравнений аппроксимируются со вторым порядком обычным образом [124]:

$$2q_{22} \frac{s_1 - x_{1u}^h}{h_u} - 2q_{12} x_{1u\theta}^h + q_{11} x_{1\theta\theta}^h + \frac{I^2}{x_1^h} = 0, \quad (5.16)$$

$$2q_{22} \frac{s_2 - x_{2u}^h}{h_u} - 2q_{12} x_{2u\theta}^h + q_{11} x_{2\theta\theta}^h = 0, \quad (5.17)$$

где  $s_1 = tx_{2\theta}^h$ ,  $s_2 = -tx_{1\theta}^h$ ,

$$t^{-1} = I(2p(x_1^h)^2 + f_1^2 - f_0^2).$$

Для решения нелинейной разностной задачи (5.13)–(5.17) применялся метод переменных направлений с постоянным итерационным параметром [119, 124], причем коэффициенты  $q_{11}$ ,  $q_{12}$ ,  $q_{22}$ ,  $I^2/x_1^h$  и смешанные производные уравнений (5.13)–(5.17), а также правые части  $s_1$ ,  $s_2$  краевых условий (5.16), (5.17) берутся с предыдущей итерации. Оптимальное значение итерационного параметра определялось экспериментально.

### 5.4. Результаты расчетов

Не останавливаясь на результатах решения конкретных физических задач [154], приведем пример равновесия с поверхностным током в кожухе кругового сечения. На рис. 25 показаны линии уровня  $u = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  для задачи (5.1)–(5.5) при  $p=2$ ,  $f_0=10$ ,  $\Phi=5$ ,  $u^*=1$ . Здесь использована сетка  $(12 \times 32)$ . Такой грубой сетки достаточно, чтобы с хорошей точностью найти решение задачи со свободной границей. В работах [89, 154] приведены физически содержательные результаты решения задач эволюции равновесных плазменных конфигураций с поверхностным током при повышении давления в достаточно сложных областях. Используемый алгоритм позволил, в частности, получить несколько решений и определить критические значения параметров. Это позволяет надеяться на успешное применение такого алгоритма и в других задачах со свободной границей.

Алгоритм решения задач эволюции в сложных областях, основанный на применении ортогональных обращенных переменных, применяется в работах [156, 157]. В этом случае равновесная конфигурация характеризуется распределенным поверхностным током (см. п. 1.6 гл. I), т. е. соответствующая задача относится к классу задач со свободной границей с нулевым дефектом. Задачи эволюции равновесных плазменных конфигураций обладают вполне определенной спецификой [81, 156], что не позволяет остановиться на них более подробно.

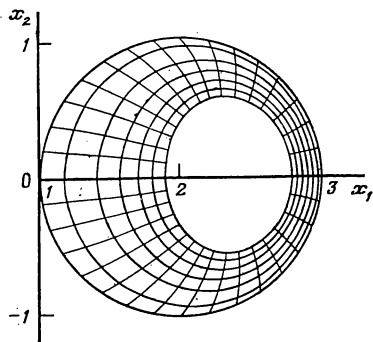


Рис. 25

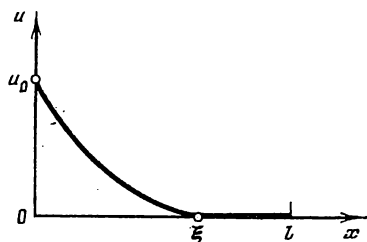
# РЕШЕНИЕ ОДНОФАЗНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## § 1. ОДНОФАЗНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

### 1.1. Задача с максимальным дефектом

Рассмотрим в качестве модельной следующую одномерную задачу. Пусть  $u(x)$  удовлетворяет при  $0 < x < \xi$ , где  $\xi$  — неизвестная граница, уравнению

$$\frac{d}{dx} k(x) \frac{du}{dx} - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < \xi, \quad (1.1)$$



с обычными ограничениями на функции  $k(x)$ ,  $q(x)$ . Граничное условие для (1.1) на левом конце имеет вид

$$u(0) = u_0, \quad (1.2)$$

а на неизвестной границе выполнены условия

$$u(\xi) = 0, \quad \frac{du}{dx}(\xi) = \lambda. \quad (1.3)$$

Рис. 26. Решение задачи (1.1) — (1.4)

Примем для определенности, что  $u_0 > 0$ ,  $\lambda < 0$ , а решение  $u(x)$  монотонно на интервале  $(0, \xi)$  (рис. 26).

### 1.2. Сведение к двухфазной задаче

Основная идея большого класса методов решения задач со свободной границей состоит в том, чтобы рассмотреть задачу в расширенной области  $(0, l)$ , где априори  $\xi < l$ , и затем решать задачу в заданной фиксированной области. Причем на интервале  $(0, l)$  желательно иметь задачу такого же типа, что и исходная. Фактически, речь идет о сведении однофазной задачи к двухфазной.

Продолжим решение задачи (1.1) — (1.3) вплоть до  $x = l$  следующим образом:

$$u(x) = 0, \quad \xi < x < l. \quad (1.4)$$

А теперь напомним вспомогательную задачу для определения

решения задачи (1.1)—(1.4) на всей области  $(0, l)$ . Приближенное решение обозначим  $u_\varepsilon(x)$  и определим его из уравнения

$$\frac{d}{dx} k(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} - q_\varepsilon(x, u_\varepsilon) u_\varepsilon = -f(x), \quad 0 < x < l. \quad (1.5)$$

Здесь  $k(x)$ ,  $f(x)$  непрерывно продолжены во вспомогательную область  $(\xi, l)$ . Дополним (1.5) граничными условиями, вытекающими из (1.2) и (1.4):

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad (1.6)$$

$$u'_\varepsilon(l) = 0. \quad (1.7)$$

Приближенное значение для свободной границы  $\xi$  обозначим через  $\xi_\varepsilon$  и определим его из условия  $u_\varepsilon(\xi_\varepsilon) = 0$ , так что  $u_\varepsilon(x) > 0$  при  $0 < x < \xi_\varepsilon$  и  $u_\varepsilon(x) < 0$  при  $\xi_\varepsilon < x < l$ . Для того чтобы решение уравнения (1.5) давало приближенное решение исходной задачи (1.1)—(1.4) при малых  $\varepsilon$ , выберем коэффициент  $q_\varepsilon(x, u_\varepsilon)$  следующим образом:

$$q_\varepsilon(x, u_\varepsilon) = \begin{cases} q(x), & u_\varepsilon(x) \geq 0, \\ q(x) + \varepsilon^{-2}, & u_\varepsilon(x) < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Осталось записать условия на свободной границе  $\xi_\varepsilon$ . Из (1.3) вытекают условия сопряжения

$$[u_\varepsilon] = 0, \quad \left[ \frac{du_\varepsilon}{dx} \right] = \lambda, \quad x = \xi_\varepsilon, \quad (1.10)$$

так как  $u_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ ,  $x \in (\xi_\varepsilon, l)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В (1.10) использованы обозначения

$$[r] = r(x=0) - r(x=l).$$

При  $\lambda=0$  можно показать, что решение задачи (1.5)—(1.10)  $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 1.3. Вариационная задача

При  $\lambda=0$  задача (1.1)—(1.3) допускает вариационную формулировку. Обозначим через  $K$  множество достаточно гладких функций:

$$K = \{v \mid v(x) \geq 0, v(0) = u_0, v(l) = 0\}. \quad (1.11)$$

Тогда решение задачи (1.1)—(1.3) при  $\lambda=0$  является решением следующей задачи минимизации:

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v). \quad (1.12)$$

Здесь

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + q(x)u^2 - 2f(x)u \right) dx. \quad (1.13)$$

Таким образом, приходим к задаче минимизации с ограничениями (1.11)—(1.13).

Одним из основных методов решения задач условной минимизации является классический метод штрафа (более подробно об этом см. ниже при рассмотрении двумерных задач). Можно вместо  $J(v)$  минимизировать функционал

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{2} \int_0^l \beta_\varepsilon(v) v^2 dx. \quad (1.14)$$

Здесь  $\beta_\varepsilon(v)$  — коэффициент штрафа, имеющий вид

$$\beta_\varepsilon(v) = \begin{cases} 0, & v \geq 0, \\ \varepsilon^{-2}, & v < 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Выбор  $\beta_\varepsilon(v)$  в виде (1.15) позволяет при  $\varepsilon \rightarrow 0$  реализовать ограничения  $u_\varepsilon(x) \geq 0$ . Легко видеть, что минимум (1.14) достигается на решениях задачи (1.5)—(1.10) при  $\lambda = 0$ , т. е. уравнение (1.5) является уравнением Эйлера для функционала  $J_\varepsilon(v)$ .

#### 1.4. Итерационный процесс

Для решения нелинейной краевой задачи (1.5)—(1.10) используем простейший итерационный процесс. По известному приближению  $u_\varepsilon^k(x)$  находится следующее приближение из решения линейной краевой задачи

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du_\varepsilon^{k+1}}{dx} \right) - q_\varepsilon(x, u_\varepsilon^k) u_\varepsilon^{k+1} = -f(x), \quad (1.16)$$

$$u_\varepsilon^{k+1}(0) = u_0, \quad (1.17)$$

$$u_\varepsilon^{k+1}(l) = 0, \quad (1.18)$$

с условиями сопряжения на  $\xi_\varepsilon^k$ , для которого  $u_\varepsilon^k(x) = 0$ ,

$$[u_\varepsilon^{k+1}] = 0, \quad \left[ \frac{du_\varepsilon^{k+1}}{dx} \right] = \lambda, \quad x = \xi_\varepsilon^k. \quad (1.19)$$

Сходимость итерационного процесса (1.16)—(1.19) может быть показана при  $\lambda = 0$ .

## 1.5. Второй вариант продолжения

Выше мы доопределили решение задачи (1.1)—(1.3) во вспомогательной области  $(\xi, l)$  с помощью соотношения (1.4). Такое продолжение решения за свободную границу  $x=\xi$  обуславливает неоднородность условий сопряжения (1.10). Существует возможность более гладкого продолжения решения за свободную границу. Положим

$$\frac{du}{dx} = \lambda, \quad \xi < x < l. \quad (1.20)$$

Естественно, что (1.20) требует постановки согласованного граничного условия вида

$$\frac{du}{dx}(l) = \lambda. \quad (1.21)$$

Вспомогательную функцию  $u_\varepsilon(x)$ , которая дает приближенное решение задачи (1.1)—(1.3), (1.20), (1.21) на  $(0, l)$ , определим из уравнения

$$\frac{d}{dx} k(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} - q(x) u_\varepsilon + c_\varepsilon(u_\varepsilon) \left( \frac{du_\varepsilon}{dx} - \lambda \right) = -f(x). \quad (1.22)$$

Здесь функции  $k(x)$ ,  $q(x)$ , и  $f(x)$  продолжаютсЯ непрерывно, а коэффициент  $c_\varepsilon(u_\varepsilon)$  имеет вид

$$c_\varepsilon(u_\varepsilon) = \begin{cases} 0, & u_\varepsilon \geq 0, \\ \varepsilon^{-2}, & u_\varepsilon < 0, \end{cases}$$

где  $\varepsilon$  — достаточно малое число.

Естественно ожидать, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  уравнение (1.22) «близко» к (1.20) во вспомогательной области  $(\xi, l)$ . Для полной постановки задачи дополним уравнение (1.22) граничными условиями

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad (1.23)$$

$$\frac{du_\varepsilon}{dx}(l) = \lambda. \quad (1.24)$$

Напомним, что в этом случае продолжения решения за свободную границу условия сопряжения при  $x=\xi_\varepsilon$  однородны и поэтому специально не выписываются.

Для приближенного решения задачи (1.22)—(1.24) разностными методами используются итерационные методы. Не останавливаясь на этом вопросе более подробно, отметим лишь, что перенесение такого варианта продолжения решения на многомерные задачи достаточно сложно.

## § 2. МЕТОДЫ РЕЛАКСАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

### 2.1. Вариационная формулировка некоторых задач со свободной границей

В § 1 было указано, что в некоторых частных случаях ( $\lambda=0$  в задаче (1.1)—(1.3)) краевую задачу со свободной границей можно свести к вариационной, к задаче минимизации некоторого функционала на множестве функций с ограничениями. Рассмотрим этот класс задач в многомерном случае.

Пусть в области  $\Omega_+$  с неизвестной частью границы  $S$  функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta u = -\varphi(x), \quad x \in \Omega_+. \quad (2.1)$$

Граничные условия на известной части границы  $\Gamma_+$  примем

$$u(x) = u_0(x), \quad x \in \Gamma_+, \quad (2.2)$$

а на  $S$  ( $\partial\Omega = \Gamma_+ + S$ ) положим

$$u(x) = 0, \quad x \in S, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in S. \quad (2.4)$$

Для определенности считаем, что  $u_0(x) \geq 0$ , а также  $u(x) \geq 0$  во всей области  $\Omega_+$ .

Заметим, что при продолжении решения  $u(x)$  задачи (2.1)—(2.4) в область  $\Omega_-$ , примыкающую к  $S$  так, что

$$u(x) = 0, \quad x \in \Omega_-,$$

мы получим в расширенной области  $\Omega = \Omega_+ + \Omega_-$  задачу со свободной границей с дефектом  $\kappa=2$  без особенности на свободной границе.

Обозначим через  $K$  множество достаточно гладких функций, определенных в  $\Omega$ , таких, что

$$K = \{v \mid v(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad v(x) = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega\},$$

где

$$u_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma_- \quad (\Gamma_- = \partial\Omega_- - S).$$

Можно показать (см., например, [52, 62]), что решение задачи (2.1)—(2.4) доставляет минимум функционалу

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} \varphi v dx \quad (2.5)$$

на множестве функций  $K$ . Это означает, что

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v). \quad (2.6)$$

## 2.2. Разностная задача

Для приближенного решения задачи минимизации (2.5), (2.6) проведем дискретизацию области  $\Omega$ . Предположим для простоты, что  $\Omega$  —  $n$ -мерный параллелепипед. Более того, ограничимся рассмотрением двумерной задачи, так как переход на трехмерные задачи принципиальных затруднений не вызывает. Пусть

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

В  $\Omega$  введем равномерную по каждому направлению сетку с шагами  $h_1$  и  $h_2$  соответственно:

$$\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h = \{x = (x_{1i}, x_{2j}) = (ih_1, jh_2),$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

где  $\omega_h$  — множество внутренних, а  $\gamma_h$  — граничных узлов.

Обозначим через  $u_{ij}^h = u^h(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ , разностное решение задачи (2.5) — (2.6). Оно определяется как минимум функционала

$$J_h(y) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \left( (y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2) \frac{h_1 h_2}{2} - \varphi y h_1 h_2 \right). \quad (2.7)$$

Функционал  $J_h(y)$  минимизируется на множестве сеточных функций

$$K_h = \{y | y(x) \geq 0, x \in \omega_h, y(x) = u_0(x), x \in \gamma_h\}.$$

С учетом введенных обозначений разностный аналог (2.6) принимает вид

$$J_h(u^h) = \inf_{y \in K_h} J_h(y). \quad (2.8)$$

Заметим, что при минимизации функционала (2.8) без ограничения  $y(x) \geq 0$  мы пришли бы к обычной разностной задаче Дирихле

$$\Delta u^h = -\varphi, x \in \omega_h, \quad (2.9)$$

$$u^h(x) = u_0(x), x \in \gamma_h. \quad (2.10)$$

Здесь

$$\Delta y = \sum_{\alpha=1}^2 y_{\bar{x}_\alpha} x_\alpha, \quad x \in \omega_h,$$

разностный оператор Лапласа на обычном пятиточечном шаблоне «крест».

Задача (2.7), (2.8) представляет собой задачу минимизации функции многих переменных (неизвестные  $y_{ij}$ ) с ограничениями в виде неравенств  $y_{ij} \geq 0$ . В такой формулировке мы имеем дело с классическими задачами условной минимизации [158–160]. Для таких задач в теории оптимизации известно много вычислительных алгоритмов. Большинство из них можно найти в книгах [161–164] и любой другой литературе по численным методам условной минимизации. Мы коснемся некоторых из них, стараясь проследить эволюцию обычных итерационных методов, развиваемых для разностных задач (2.9), (2.10) [119], при переходе к задачам минимизации типа (2.7), (2.8).

### 2.3. Явный метод простой итерации

Запишем уравнение (2.9) с учетом граничных условий (2.10) в виде операторного уравнения

$$Au^h = f. \quad (2.11)$$

Оператор  $A$  в (2.11) задан равенством  $Au^h = -\Delta v$ , а сеточная функция  $v(x) = u^h(x)$ ,  $x \in \omega_h$ , и  $v(x) = 0$ ,  $x \in \gamma_h$ . Правая часть  $f$  принимает вид

$$f(x) = \varphi + h_1^{-2} \varphi_1(x) + h_2^{-2} \varphi_2(x), \quad x \in \omega_h, \quad (2.12)$$

где  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  отличны от нуля только в приграничных узлах:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} u_0(0, x_2), & x_1 = h_1, \\ 0, & 2h_1 \leq x_1 \leq l_1 - 2h_1, \\ u_0(l_1, x_2), & x_1 = l_1 - h_1, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} u_0(x_1, 0), & x_2 = h_2, \\ 0, & 2h_2 \leq x_2 \leq l_2 - 2h_2, \\ u_0(x_1, l_2), & x_2 = l_2 - h_2 \end{cases}$$

Простейшей итерационной процедурой для получения решения (2.9), (2.10) является процесс Либмана (метод Якоби), при котором следующее итерационное приближение  $y^{k+1}(x)$  определяется из условия

$$y_{ij}^{k+1} \left( \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) = \frac{1}{h_1^2} (y_{i+1,j}^k + y_{i-1,j}^k) + \\ + \frac{1}{h_2^2} (y_{i,j+1}^k + y_{i,j-1}^k) + \Phi_{ij}, \quad x \in \omega_h, \quad (2.13)$$

дополненного краевыми условиями (2.10). В более общей операторной формулировке итерационный процесс (2.13) — частный случай метода простой итерации:

$$\frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + Ay^k = f \quad (2.14)$$

при выборе

$$\tau^{-1} = \tau_0^{-1} = \frac{h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)}.$$

С другой стороны, итерационный процесс (2.13) соответствует следующему покоординатному спуску при решении задачи минимизации  $J_h(y)$ :

$$J_h(y_{11}^k, y_{12}^k, y_{21}^k, \dots, y_{ij}^{k+1/2}, \dots, y_{N_1-1, N_2-1}^k) \leq \\ \leq J_h(y_{11}^k, y_{12}^k, y_{21}^k, \dots, v_{ij}, \dots, y_{N_1-1, N_2-1}^k) \quad (2.15)$$

для каждого значения  $v_{ij}$  при условии, что  $y^{k+1} = y^{k+1/2}$ .

Для метода простой итерации (2.14) с учетом введенных обозначений получим

$$y^{k+1} = \sigma y^{k+1/2} + (1 - \sigma) y^k, \quad (2.16)$$

где  $\sigma$  — параметр релаксации, принимающий значение  $\sigma = \tau/\tau_0$ .

Что касается задач с ограничениями, то можно построить аналогичный итерационный процесс с дополнительной процедурой проектирования на множество допустимых сеточных функций  $K_h$ .

Такой итерационный метод состоит из двух этапов. На первом этапе определим  $y^{k+1/2}$  согласно (2.15), на втором — следующее приближение возьмем по формуле

$$y^{k+1} = P_K y^{k+1/2}. \quad (2.17)$$

Здесь  $P_K$  — оператор проектирования на множество допустимых значений сеточных функций  $K_h$ , в нашем случае

$$P_K y = \max (0, y). \quad (2.18)$$

Аналогичный подход используется и при применении метода простой итерации. Сначала, так же как при решении задачи без ограничений, совершается шаг по схеме (2.14):

$$\frac{y^{k+1/2} - y^k}{\tau} + Ay^k = f. \quad (2.19)$$

Затем с учетом ограничений определяется  $y^{k+1}$  согласно (2.17). Заметим, что модификация (2.17) возможна и для других задач, в частности при использовании иных итерационных методов, других условий ограничения на решение задачи.

## 2.4. Методы релаксации

Рассмотрим в качестве более сложного примера простейший треугольный метод — метод релаксации. Применение итерационного метода Гаусса—Зейделя для уравнения (2.9) дает

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h_1^2} y_{i-1,j}^{k+1} - \frac{1}{h_2^2} y_{i,j-1}^{k+1} + \left( \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_{ij}^{k+1} = \\ & = \frac{1}{h_1^2} y_{i+1,j}^k + \frac{1}{h_2^2} y_{i,j+1}^k + \Phi_{ij}, \quad x \in \omega_n. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Итерационный процесс (2.20) эквивалентен последовательной минимизации функционала  $J_h(y)$  в соответствии с

$$\begin{aligned} & J_h(y_{11}^{k+1}, y_{12}^{k+1}, y_{21}^{k+1}, \dots, y_{ij}^{k+1/2}, \dots, y_{N_1-1, N_2-1}^k) \leq \\ & \leq J_h(y_{11}^{k+1}, y_{12}^{k+1}, y_{21}^{k+2}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{N_1-1, N_2-1}^k) \end{aligned} \quad (2.21)$$

при условии  $y^{k+1} = y^{k+1/2}$ . Метод релаксации соответствует определению  $y^{k+1/2}$  из (2.21) и применению (2.16), причем значение параметра релаксации  $\sigma > 1$  дает метод верхней релаксации, а  $0 < \sigma < 1$  — нижней.

В операторной записи описываемый метод релаксации имеет вид

$$(D + A_-) \frac{y^{k+1} - y^k}{\sigma} + Ay^k = f, \quad (2.22)$$

где  $D$  — диагональная, а  $A_-$  — нижняя треугольная матрицы. В рассматриваемом конкретном случае оператора Лапласа

$$(D + A_-) y = -\frac{1}{h_1^2} y_{i-1,j} - \frac{1}{h_2^2} y_{i,j-1} + \left( \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_{ij}.$$

При решении задач с ограничениями итерационный процесс (2.22) модифицируется аналогично (2.17), (2.19). Промежуточное приближение  $y^{k+1/2}$  определяется из

$$(D + A_-) \frac{y^{k+1/2} - y^k}{\sigma} + Ay^k = f, \quad (2.23)$$

а  $y^{k+1}$  — проектированием  $y^{k+1/2}$  на  $K_h$  согласно (2.17), (2.18).

Как и при решении краевой задачи (2.9), (2.10), можно показать сходимость (2.17), (2.23) при тех же ограничениях на параметр релаксации:  $0 < \sigma < 2$ . Детальное изложение этих вопросов применительно к задачам типа (2.1) — (2.4) содержится в [62].

### § 3. МЕТОДЫ ШТРАФА

#### 3.1. Общее описание методов штрафа

Второй класс методов, широко используемых при решении задач минимизации с ограничениями, связан с применением того или иного варианта метода штрафа. Рассмотрим, например, экстремальную задачу (2.5), (2.6). Вместо задачи отыскания минимума функционала  $J(v)$  на множестве функций  $K$  с ограничением  $v(x) \geq 0$  при применении метода штрафа решается приближенная задача, но уже без ограничений.

Формально задача минимизации (2.6) может быть записана как задача безусловной минимизации функционала  $J_0(v)$ , где

$$J_0(v) = J(v) + P(v|K). \quad (3.1)$$

Здесь  $P(v|K)$  — индикаторная функция множества ограничений  $K$ :

$$P(v|K) = \begin{cases} 0, & v \in K, \\ +\infty, & v \notin K. \end{cases} \quad (3.2)$$

Для того чтобы перейти к более конструктивной задаче минимизации, чем (3.1), (3.2), введем штраф, зависящий от параметра штрафа  $\varepsilon$  так, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon(v|K) = P(v|K). \quad (3.3)$$

Выбор штрафа  $P_\varepsilon(v|K)$  в рамках (3.3) может быть самым различным.

С учетом (3.3) задача приближенной минимизации (3.1), (3.2) состоит в решении следующей задачи безусловной минимизации:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon(v), \quad (3.4)$$

где

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + P_\varepsilon(v|K). \quad (3.5)$$

Из большого разнообразия вариантов выбора штрафа  $P_\varepsilon(v|K)$  выделяют два основных: внутренние и внешние методы штрафа.

### 3.2. Внутренние методы штрафа

Данный класс методов характеризуется тем, что  $P_\varepsilon(v|K)$  выбирается так, что решение задачи минимизации (3.4), (3.5) принадлежит множеству ограничений, т. е. в нашем случае  $u_\varepsilon(x) \geq 0$ .

Наиболее часто применяются следующие функции штрафа  $P_\varepsilon(v|K)$  для методов с  $u_\varepsilon(x) \in K$ :

$$P_\varepsilon(v|K) = -\varepsilon^2 \int_{\Omega} \ln v dx, \quad (3.6)$$

$$P_\varepsilon(v|K) = \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{v(x)} dx. \quad (3.7)$$

После этого рассматривается задача безусловной минимизации (3.4), (3.5). В частности, уравнение Эйлера для задачи (3.4) — (3.6) с  $J(v)$ , определяемым согласно (2.5), имеет вид

$$\Delta u_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{u_\varepsilon} = -\varphi(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) дополняется обычным условием на границе области

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.9)$$

Аналогично ставится задача при использовании штрафа в форме (3.7).

Таким образом, исходная задача со свободной границей заменяется на приближенную краевую задачу (3.8), (3.9) при достаточно малом  $\varepsilon$ . Сделаем несколько общих замечаний относительно использования внутренних методов штрафа при приближенном решении задач со свободной границей. Качест-

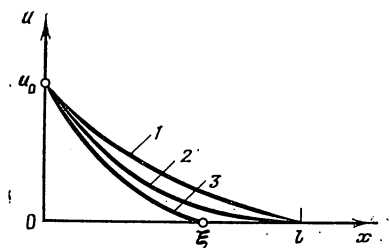


Рис. 27. Внутренний метод штрафа: 1 — решение при  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , 2 —  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ), 3 — точное решение

венное поведение приближенного решения одномерной задачи, которая рассматривалась в § 1, отображено на рис. 27. При уменьшении  $\varepsilon$  до нуля  $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ , но только сверху, и поэтому  $u_\varepsilon(x) > 0$  во всех внутренних точках. Во многих задачах свободная граница является целью исследования. При применении внутренних методов штрафа условие (2.3) не может определять свободную границу приближенно. Это имеет место

и в многомерном случае. Такое поведение приближенного решения подразумевает постановку специального условия для нахождения свободной границы. Отметим также, что нелинейная краевая задача достаточно сложна для ее численного решения, причем трудности обусловлены близостью  $u_\varepsilon(x)$  к нулю и малостью параметра штрафа  $\varepsilon$ .

### 3.3. Внешние методы штрафа

К методам названного класса относят такие, для которых  $u_\varepsilon(x)$ , вообще говоря, не принадлежит  $K$ . Чаще всего рассматривают штраф в виде

$$P_\varepsilon(v|K) = \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_{\Omega} (v^-)^2 dx, \quad (3.10)$$

где

$$v^-(x) = \max(0, -v(x)).$$

Использование штрафа в форме (3.10) позволяет записать функционал  $J(v)$  в виде

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \varphi u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta_\varepsilon(v) v^2 dx. \quad (3.11)$$

Здесь

$$\beta_\varepsilon(v) = \begin{cases} 0, & v \geq 0, \\ \varepsilon^{-2}, & v < 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

разрывный коэффициент, который встречался ранее в § 1 при рассмотрении одномерных задач.

Уравнение Эйлера для (3.11), (3.12) имеет следующий вид:

$$\Delta u_\varepsilon - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) u_\varepsilon = -\varphi(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.13)$$

Оно дополняется краевыми условиями (3.9).

### 3.4. Задача с особенностью на свободной границе

Рассмотрим теперь эвристические возможности использования метода штрафа при решении задач с особенностью на свободной границе. Предположим, что вместо (2.4) на  $S$  задано неоднородное условие

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = \psi(x), \quad x \in S. \quad (3.14)$$

В § 1 уже обсуждался одномерный вариант такой задачи. Аналогично поступим и в многомерной задаче (2.1) — (2.3), (3.14).

При применении варианта метода штрафа (3.10) будем рассматривать задачу для уравнения (3.13). Дополнительно к краевым условиям (3.9) выпишем неоднородные условия сопряжения на приближенной границе  $S_\varepsilon$ . Сама граница  $S_\varepsilon$  во внешних методах штрафа определяется условием  $u_\varepsilon(x) = 0$ , т. е.

$$S_\varepsilon = \{x \mid x \in \Omega, u_\varepsilon(x) = 0\}.$$

Запишем условия сопряжения в виде

$$[u_\varepsilon] = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (3.15)$$

$$\left[ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} \right] = \psi(x), \quad x \in S_\varepsilon. \quad (3.16)$$

Заметим, что реализация неоднородных условий сопряжения (3.15), (3.16) может быть основана на подходах, кратко сформулированных в гл. II применительно к задачам без дефекта.

#### § 4. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ШТРАФА

##### 4.1. Итерационный процесс

При применении внешнего метода штрафа (см. п. 3.3) мы пришли к необходимости решения следующей нелинейной краевой задачи:

$$\Delta u_\varepsilon - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) u_\varepsilon = -\varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.2)$$

где

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = \begin{cases} 0, & u_\varepsilon \geq 0, \\ \varepsilon^{-2}, & u_\varepsilon < 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Существенной особенностью задачи (4.1)–(4.3) является наличие сильно переменного коэффициента  $\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)$ , который зависит от решения. Напомним, что необходимо решать задачу (4.1)–(4.3) при возможно меньшем числе  $\varepsilon$ , которое характеризует близость приближенного решения  $u_\varepsilon(x)$  к точному решению  $u(x)$  исходной задачи со свободной границей (2.1)–(2.4). Соответствующая оценка точности имеет вид [165, 166]

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{W^1_2(\Omega)} \leq c\varepsilon.$$

Запишем (4.1), (4.2) в виде операторного уравнения

$$\mathcal{A}u_\varepsilon = \varphi, \quad (4.4)$$

где оператор  $\mathcal{A}$  определен соотношением

$$\mathcal{A}u_\varepsilon = -\Delta u_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)u_\varepsilon \quad (4.5)$$

на множестве функций, удовлетворяющих граничному условию (4.2).

В канонической форме [124] двухслойный итерационный метод решения (4.4) имеет вид

$$\mathcal{B}_{s+1} \frac{u_\varepsilon^{s+1} - u_\varepsilon^s}{\omega_{s+1}} + \mathcal{A}u_\varepsilon^s = \varphi, \quad s = 0, 1, \dots \quad (4.6)$$

Скорость сходимости итерационного процесса (4.6) зависит от выбора операторов  $\mathcal{B}_{s+1}$  и итерационных параметров  $\omega_{s+1}$ .

Для построения  $\mathcal{B}_{s+1}$  в нашей задаче (4.4), (4.5) удобно воспользоваться общими результатами по приближенному решению нелинейных эллиптических уравнений, изложенных, например, в книге [119]. Применим для решения задачи (4.4), (4.5) метод Ньютона—Канторовича. Для этого положим в (4.6)

$$\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{A}'(u_\varepsilon^s), \quad (4.7)$$

где  $\mathcal{A}'(v)$  — производная Гато оператора  $\mathcal{A}(v)$ . В случае (4.5) имеем

$$\mathcal{A}'(v) = -\Delta + \beta_\varepsilon(v). \quad (4.8)$$

Известно, что итерационный процесс (4.6), (4.7) сходится для всех значений итерационного параметра  $0 < \omega_{s+1} \leq 1$  при достаточно близком к решению начальном приближении  $u_\varepsilon^0(x)$ . Метод Ньютона—Канторовича соответствует наиболее оптимальному значению  $\omega_{s+1} = 1$ . Применительно к нашей задаче с  $\mathcal{A}'(v)$ , определяемым согласно (4.8), а  $\mathcal{A}(v)$  — согласно (4.5), на каждой  $(s+1)$ -й итерации необходимо решать следующую линейную краевую задачу:

$$\Delta u_\varepsilon^{s+1} - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s)u_\varepsilon^{s+1} = -\varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.9)$$

$$u_\varepsilon^{s+1}(x) = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.10)$$

В свою очередь задача (4.9), (4.10) (ее разностный аналог) решается с применением итерационных методов. Таким образом, речь идет о построении двухступенчатых итерационных методов решения нелинейной краевой задачи (4.1), (4.2). Излагаемый ниже материал данного параграфа посвящен вопросам численного решения линейной задачи (4.9), (4.10).

## 4.2. Линейная задача

Рассмотрим модельную линейную задачу, соответствующую (4.9), (4.10), используя несколько другие обозначения. Пусть

$$\Delta v - \beta(x)v = -\varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.11)$$

$$v(x) = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.12)$$

где  $\beta(x) \geq 0$ , причем  $v(x) = u_{\varepsilon}^{s+1}(x)$ , а  $\beta(x) = \beta_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}^s)$ .

Перейдем в прямоугольнике  $\Omega$  к разностной задаче для уравнения

$$\Lambda y - c(x)y = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad (4.13)$$

с однородным граничным условием

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma_h. \quad (4.14)$$

Здесь  $\Lambda$  — разностный оператор Лапласа (см. п. 2.2):

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} y = \sum_{\alpha=1}^2 y_{\bar{x}_{\alpha}} x_{\alpha}, \quad (4.15)$$

а правая часть  $f(x)$  обусловлена неоднородным граничным условием (4.12) и  $\varphi(x)$ .

Запишем обычным образом [124] разностную задачу (4.13) — (4.15) в виде операторного уравнения

$$A y = f. \quad (4.16)$$

С учетом (4.13), (4.15) для  $A$  получим представление

$$A = -\Lambda + c(x)E, \quad (4.17)$$

где  $E$  — единичный сеточный оператор.

Напомним основные свойства разностного оператора  $\Lambda$ , определенного на множестве сеточных функций, удовлетворяющих однородному граничному условию (4.14), известные в теории разностных схем [124]. Оператор  $A_0 = -\Lambda$  самосопряжен ( $A_0 = A_0^*$ ) и для него справедливы оценки

$$\delta_0 E \leq A_0 \leq \Delta_0 E, \quad (4.18)$$

где  $\delta_0$ ,  $\Delta_0$  — минимальное и максимальное собственные значения оператора  $A_0$ . Напомним выражения для  $\delta_0$  и  $\Delta_0$ :

$$\delta_0 = \sum_{\alpha=1}^2 \delta_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{4}{h_{\alpha}^2} \sin^2 \frac{\pi h_{\alpha}}{2l_{\alpha}}, \quad (4.19)$$

$$\Delta_0 = \sum_{\alpha=1}^2 \Delta_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{4}{h_{\alpha}^2}. \quad (4.20)$$

В представлении

$$A_0 = \sum_{\alpha=1}^2 A_{\alpha}, \quad (4.21)$$

где  $A_{\alpha} = -\Lambda_{\alpha}$ ,  $\alpha=1, 2$ , операторы  $A_1, A_2$  перестановочны, т. е.

$$A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Кроме того,

$$\delta_{\alpha} E \leq A_{\alpha} \leq \Delta_{\alpha} E, \quad \alpha=1, 2, \quad (4.22)$$

а  $\delta_{\alpha}, \Delta_{\alpha}$ ,  $\alpha=1, 2$ , определены в (4.19), (4.20).

После такой подготовительной работы можно перейти к рассмотрению итерационных методов решения уравнения (4.16) с оператором  $A = A_0 + c(x)E$ .

### 4.3. Основной результат теории итерационных методов

Приведем в качестве базового материала основную теорему теории итерационных методов решения сеточных эллиптических уравнений. Для приближенного решения уравнения (4.16) будем использовать двухслойную итерационную схему вида

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k=0, 1, \dots, \quad (4.23)$$

где  $B = B^* > 0$ ,  $A = A^* > 0$ . Скорость сходимости (4.23) определяется параметрами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в операторной оценке энергетической эквивалентности операторов  $B$  и  $A$ :

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0. \quad (4.24)$$

При условии, что  $\tau_{k+1} = \tau = \text{const}$  (метод простой итерации), оптимальное значение итерационного параметра

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

а для числа итераций  $n$ , необходимых для достижения относительной точности  $\varepsilon_0$ , верна [119, 124] оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon_0) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon_0}}{\ln \frac{1}{\rho_0}}, \quad (4.25)$$

где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Более быстрым является метод с чебышевским набором итерационных параметров  $\tau_{k+1}$ , в котором

$$\tau_k = \tau_0(1 + \rho_0 \mu_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.26)$$

а  $\mu_k$  — соответствующим образом упорядоченные [119, 124] корни полинома Чебышева  $n$ -го порядка:

$$\mu_k \in \left\{ -\cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

В этом случае для числа итераций  $n$  получим

$$n \geq n_0(\varepsilon_0) = \frac{\ln \frac{2}{\varepsilon_0}}{\ln \frac{1}{-\rho_1}}, \quad (4.27)$$

где

$$\rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}.$$

Более подробно теория итерационных методов изложена в книгах [119, 124, 167, 168].

Заметим, что при применении методов с чебышевским набором итерационных параметров возникают некоторые неудобства. Первое из них связано с тем, что для формирования  $\tau_{k+1}$  требуется знание  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Во-вторых, при определении  $\tau_{k+1}$  из (4.26) мы должны заранее указать  $n$ . Этих недостатков лишены трехслойные итерационные методы вариационного типа сопряженных направлений, для которых скорость сходимости та же, что и для методов с чебышевским набором итерационных параметров. В частности, для числа итераций верна оценка (4.27). В вычислительной практике хорошо зарекомендовал себя и широко используется метод сопряженных градиентов. Трехслойная схема этого метода, связывающая  $y_{k-1}$ ,  $y_k$  и  $y_{k+1}$ , имеет вид

$$By_{k+1} = \alpha_{k+1}(B - \tau_{k+1}A)y_k + (1 - \alpha_{k+1})By_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}f, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.28)$$

$$By_1 = (B - \tau_1A)y_0 + \tau_1f. \quad (4.29)$$

Итерационные параметры  $\alpha_{k+1}$ ,  $\tau_{k+1}$  находятся из условий

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, w_k)}{(Aw_k, w_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.30)$$

$$\alpha_{k+1} = \left( 1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(r_k, w_k)}{(r_{k-1}, w_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1} \quad (4.31)$$

$$\alpha_1 = 1, k = 1, 2, \dots,$$

где  $r_k = Ay_k - f$  — невязка, а  $w_k = B^{-1}r_k$  — поправка на  $k$ -й итерации.

#### 4.4. Явный метод

Мы ставим своей целью разработку модификаций основных итерационных методов для задач типа (4.16), (4.17), в которых коэффициент  $c(x)$  сильно меняется. Запишем оператор в (4.16), (4.17) в виде

$$A = A_0 + c(x)E. \quad (4.32)$$

Предположим, что для уравнения (4.16) с  $A = A_0$ , т. е. при  $c(x) \equiv 0$ , имеется хороший итерационный метод. Нужно так его модернизировать, чтобы при переходе к задаче с возмущенным оператором (4.32) скорость сходимости сильно не изменялась, не зависела от коэффициента  $c(x)$ . Другими словами, необходимо как можно больше ослабить влияние коэффициента  $c(x)$  на скорость сходимости итерационного процесса.

Начнем с простейшего явного метода, для которого  $B = B_0 = E$  в (4.23) (или в (4.28), (4.29)). Пусть

$$\gamma_1^0 B_0 \leq A_0 \leq \gamma_2^0 B_0. \quad (4.33)$$

В нашем примере  $A_0 = -\Lambda$  и постоянные  $\gamma_1^0$  и  $\gamma_2^0$  совпадают с  $\delta_0, \Delta_0$ , определенными согласно (4.19), (4.20).

Для задач с оператором  $A$  вида (4.32) определим  $B = D$ , где  $D$  — диагональный оператор, задаваемый соотношением

$$D = d(x)E, \quad d(x) = 1 + \frac{c(x)}{\gamma_1^0}.$$

Аналогично модифицируется и более общий случай, когда для  $A_0$  выбирается  $B_0 = D_0$ , где  $D_0 = d_0(x)E$ . При решении (4.16) с оператором  $A$  вида (4.32) положим  $B = D$ , где

$$D = D_0 + \frac{c(x)}{\gamma_1^0} E. \quad (4.34)$$

С учетом (4.33), (4.34) простые выкладки дают

$$A = A_0 + c(x)E \geq \gamma_1^0 D_0 + c(x)E = \gamma_1^0 D = \gamma_1 B,$$

$$A \leq \gamma_2^0 D_0 + c(x)E \leq \gamma_2^0 \left( D_0 + \frac{c(x)}{\gamma_1^0} E \right) = \gamma_2^0 D = \gamma_2 B.$$

Таким образом, переход к задаче с  $c(x) \neq 0$  не приводит к увеличению  $\gamma_2/\gamma_1$  ( $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1, 2$ ), т. е. число итераций остается таким же, как и при  $c(x) \equiv 0$ .

Отметим, что при  $A=A_0=-\Lambda$  для явного метода с чебышевским набором итерационных параметров для числа итераций  $n$  из (4.27) получим оценку

$$n = O(N) \ln \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad N \sim N_1 \sim N_2. \quad (4.35)$$

В методе простой итерации (оценка (4.25))

$$n = O(N^2) \ln \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad (4.36)$$

что, конечно, значительно хуже, чем (4.35).

#### 4.5. Попеременно-треугольный метод

Одним из наиболее быстрых итерационных методов решения сеточных уравнений является попеременно-треугольный метод, предложенный А. А. Самарским [169] и развитый в работах [170, 171]. При решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа ( $A=A_0=-\Lambda$ ) соответствующая оценка для числа итераций имеет вид

$$n = O(\sqrt{N}) \ln \frac{1}{\varepsilon_0}. \quad (4.37)$$

Приведем основной результат теоретического исследования попеременно-треугольного метода (см. [119, 124]).

Пусть решается задача (4.16) и

$$A = A^* = R_1 + R_2 > 0, \quad R_1 = R_2^*. \quad (4.38)$$

Определим оператор

$$D = D^* > 0, \quad (4.39)$$

чтобы имели место следующие операторные неравенства:

$$A \geq \bar{\delta} D, \quad R_1 D^{-1} R_2 \leq \frac{\bar{\Delta}}{4} A, \quad \bar{\delta} > 0. \quad (4.40)$$

Попеременно-треугольный метод характеризуется тем, что оператор  $B$  в (4.23) или в (4.28), (4.29) выбирается в виде

$$B = (D + \omega R_1) D^{-1} (D + \omega R_2). \quad (4.41)$$

Справедливо следующее основное утверждение. При

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{\bar{\delta} \bar{\Delta}}}$$

и при применении чебышевского набора итерационных параметров для числа итераций (4.23) справедлива оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon_0) = \frac{\ln \frac{2}{\varepsilon_0}}{2 \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{\eta}}, \quad (4.42)$$

где  $\eta = \bar{\delta}/\bar{\Delta}$ .

При решении задачи (4.16) для  $A = A_0 = -\Lambda$  параметры  $\bar{\delta}$  и  $\bar{\Delta}$  можно взять равными  $\delta_0$  и  $\Delta_0$ , определяемыми согласно (4.19), (4.20). Поэтому из (4.42) вытекает оценка (4.37) для числа итераций попеременно-треугольного метода.

Построим теперь модификацию попеременно-треугольного метода для итерационного решения задачи (4.16) на основе варианта метода для  $A = A_0$ . Пусть указан оператор  $D_0$ , который предполагается диагональным ( $D_0 = d_0(x)E$ ) и который соответствует попеременно-треугольному методу для оператора  $A_0$ . Это значит, что выполнены оценки типа (4.40):

$$A_0 \geq \bar{\delta}_0 D_0, \quad R_1^0 D_0^{-1} R_2^0 \leq \frac{\bar{\Delta}_0}{4} A_0, \quad \bar{\delta}_0 > 0, \quad (4.43)$$

где

$$A_0 = A_0^* = R_1^0 + R_2^0 > 0, \quad R_1^0 = (R_2^0)^*. \quad (4.44)$$

В силу равенства (4.32) естественно положить

$$R_\alpha = R_\alpha^0 + \frac{c(x)}{2} E, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.45)$$

Зададим оператор  $D$  в форме

$$D = d(x)E, \quad (4.46)$$

где

$$d(x) = d_0(x) + \frac{c(x)}{\bar{\delta}_0}.$$

Докажем, что в этом случае имеют место оценки (4.40) с теми же параметрами  $\bar{\delta}$ ,  $\bar{\Delta}$ , что и для  $A_0$ , т. е.  $\bar{\delta} = \bar{\delta}_0$  и  $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_0$ .

Действительно, для  $A$  имеем

$$\begin{aligned} A &= A_0 + c(x)E \geq \bar{\delta}_0 D_0 + c(x)E = \\ &= \bar{\delta}_0 \left( d_0(x) + \frac{c(x)}{\bar{\delta}_0} \right) E = \bar{\delta} D. \end{aligned} \quad (4.47)$$

С другой стороны, в силу определения операторов  $R_\alpha$  и  $R_\alpha^0$  с помощью (4.44), (4.45) получим

$$\begin{aligned} (R_1 D^{-1} R_2 y, y) &= (D^{-1} R_2 y, R_2 y) = \\ &= \left( \frac{1}{d(x)} (R_2 y)^2, 1 \right) = \left( \frac{1}{d(x)} \left( R_2^0 y + \frac{c(x)}{2} y \right)^2, 1 \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Применяя  $\varepsilon$ -неравенство

$$2ab = a^2 \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b^2$$

для  $\varepsilon > 0$ , найдем из (4.48)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{d(x)} \left( R_2^0 y + \frac{c(x)}{2} y \right)^2, 1 \right) &\leq \left( \frac{1+\varepsilon}{d(x)} (R_2^0 y)^2, 1 \right) + \\ &+ \left( \frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon d(x)} c^2(x) y^2, 1 \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

При  $c(x) > 0$  (случай  $c(x) \geq 0$  рассматривается аналогично) положим  $\varepsilon = c(x) / (\bar{\delta}_0 d_0(x))$ . С учетом (4.43) получим

$$\left( \frac{1+\varepsilon}{d(x)} (R_2^0 y)^2, 1 \right) = \left( \frac{1}{d_0(x)} (R_2^0 y)^2, 1 \right) \leq \frac{\bar{\Delta}_0}{4} (A_0 y, y). \quad (4.50)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (4.49) при таком же  $\varepsilon$ . Имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon d(x)} c^2(x) y^2, 1 \right) &= \left( \frac{\bar{\delta}_0}{4} c(x) y^2, 1 \right) < \\ < \frac{\bar{\Delta}_0}{4} (c(x) y^2, 1), \end{aligned} \quad (4.51)$$

так как  $\bar{\delta}_0 < \bar{\Delta}_0$ . Объединяя (4.50), (4.51), получим с учетом (4.48), (4.49) доказываемую оценку (4.40), причем  $\bar{\delta} = \bar{\delta}_0$  и  $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_0$ .

Таким образом, показано, что при выборе  $D$  согласно (4.46) параметры  $\bar{\delta}$ ,  $\bar{\Delta}$  в (4.40), определяющие скорость сходимости попеременно-треугольного метода (4.23), (4.41), не изменяются при переходе от оператора  $A_0$  к оператору  $A$ , т. е. скорость сходимости метода для задачи с  $c(x) \geq 0$  не хуже, чем при  $c(x) \equiv 0$ .

При решении задачи для  $A = A_0 = -\Lambda$  операторы  $R_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , задаются выражениями

$$\begin{aligned} R_1^0 &= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{h_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}, \\ R_2^0 &= - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{h_\alpha} y_{x_\alpha}, \end{aligned}$$

причем

$$D_0 = E.$$

Для числа итераций из (4.42) получаем оценку

$$n_0(\varepsilon_0) \approx \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{\pi}} \ln \frac{2}{\varepsilon_0}$$

при решении задачи в квадрате и  $N = N_1 = N_2$ . Как показано выше, такая же оценка справедлива и для задачи с  $A = -\Lambda + c(x)E$ .

#### 4.6. Метод переменных направлений

Рассмотрим теперь другой хорошо известный итерационный метод — метод переменных направлений. Запишем оператор  $A_0$  в виде (4.21). Для оператора  $A$  в форме (4.32) аналогичное представление имеет вид

$$A = A_1 + A_2, \quad (4.52)$$

где

$$A_1 = A_1^0 + \sigma c(x)E, \quad (4.53)$$

$$A_2 = A_2^0 + (1 - \sigma)c(x)E. \quad (4.54)$$

Здесь  $\sigma$  — числовой параметр такой, что  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Для операторов  $A_1, A_2$ , очевидно, выполнены условия

$$A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Выберем  $\sigma$  в (4.53), (4.54) из условия минимизации числа итераций в методе переменных направлений при решении (4.16), (4.32). Рассмотрим итерационный процесс (4.23) с

$$B = \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right). \quad (4.55)$$

Запишем (4.23), (4.55) в виде

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right) y_{k+1/2} = \left(E - \frac{\tau}{2} A_2\right) y_k + \frac{\tau}{2} f, \quad (4.56)$$

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) y_{k+1} = \left(E - \frac{\tau}{2} A_1\right) y_{k+1/2} + \frac{\tau}{2} f. \quad (4.57)$$

Обозначим  $z_{k+1} = y_{k+1} - y$  погрешность на  $(k+1)$ -й итерации, а

$$v_{k+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) z_{k+1}.$$

С учетом этих обозначений из (4.56), (4.57) получим

$$v_{k+1} = S_1 S_2 v_k, \quad (4.58)$$

где

$$S_\alpha = \left( E + \frac{\tau}{2} A_\alpha \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{2} A_\alpha \right), \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.59)$$

Из (4.58) вытекает

$$\|v_{k+1}\| \leq \|S_1 S_2\| \|v_k\| \leq \|S_1\| \|S_2\| \|v_k\|. \quad (4.60)$$

Далее используем тот факт, что норма оператора  $S(\tau)$ , определяемого выражением

$$S(\tau) = \left( E + \frac{\tau}{2} A_0 \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{2} A_0 \right),$$

для оператора

$$A_0 = A_0^* > 0, \quad \delta_0 E \leq A_0 \leq \Delta_0 E, \quad \delta_0 > 0,$$

достигает минимального значения при  $\tau = \tau_0 = 2/\sqrt{\delta_0 \Delta_0}$ , причем

$$\min \|S(\tau)\| = \frac{1 - \sqrt{\eta_0}}{1 + \sqrt{\eta_0}}, \quad \eta_0 = \frac{\delta_0}{\Delta_0}. \quad (4.61)$$

Доказательство этого утверждения содержится, например, в [119, 124].

С учетом (4.61) рассмотрим операторы  $S_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , определенные согласно (4.59). Обозначим  $c_0 = \max_{x \in \omega_n} c(x)$ . Тогда из

(4.53), (4.54) следует

$$\delta_1 E \leq A_1 \leq (\Delta_1 + \sigma c_0) E, \quad (4.62)$$

$$\delta_2 E \leq A_2 \leq (\Delta_2 + (1 - \sigma) c_0) E, \quad (4.63)$$

где использованы обозначения (4.21), (4.22). Принимая во внимание, что  $\|S_\alpha\| \leq 1$ ,  $\alpha = 1, 2$ , получим

$$\|S_1\| \|S_2\| \leq \min \{\|S_1\|, \|S_2\|\}.$$

Оценим, например,  $\|S_1\|$ . Из (4.61), (4.62) имеем

$$\min \|S_1\| = \frac{1 - \sqrt{\eta_1}}{1 + \sqrt{\eta_1}},$$

где

$$\eta_1 = \eta_1(\sigma) = \frac{\delta_1}{\Delta_1 + \sigma c_0}.$$

Отсюда вытекает, что для минимизации нормы оператора  $S_1$  необходимо взять  $\sigma=0$ , тогда

$$\min \|S_1\| = \frac{\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\delta_1}}.$$

Аналогичное рассмотрение оператора  $S_2$  дает

$$\min \|S_2\| = \frac{\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\Delta_2} + \sqrt{\delta_2}}$$

только при  $\sigma=1$ .

Следовательно, в зависимости от того, что меньше,  $\min \|S_1\|$  или  $\min \|S_2\|$ , выбирается либо  $\sigma=0$ , либо  $\sigma=1$ , а также соответствующее значение итерационного параметра  $\tau = 2/\sqrt{\delta_1\Delta_1}$  или  $\tau = 2/\sqrt{\delta_2\Delta_2}$ . Заметим, что при  $0 < \sigma < 1$  минимум норм  $\|S_1\|$  и  $\|S_2\|$  зависит от  $c_0$ , причем  $\|S_1\| \|S_2\| \rightarrow 1$  при  $c_0 \rightarrow \infty$ . Последняя ситуация характерна для задач со свободной границей при применении метода штрафа. Таким образом, скорость сходимости метода переменных направлений не зависит от коэффициента  $c(x)$  лишь при  $\sigma=0$  или  $\sigma=1$ .

Аналогично строятся модификации метода переменных направлений вида

$$\frac{y_{k+1/2} - y_k}{\tau_1} + A_1 y_{k+1/2} + A_2 y_k = f,$$

$$\frac{y_{k+1} - y_{k+1/2}}{\tau_2} + A_1 y_{k+1/2} + A_2 y_{k+1} = f.$$

Здесь также необходимо выбирать либо  $\sigma=0$ , либо  $\sigma=1$ . Более подробно модификация методов переменных направлений для задач типа (4.16), (4.32) описана в [97].

Сделаем несколько замечаний относительно итерационных методов, используемых при реализации метода штрафа для решения задач со свободной границей. Итерационный процесс (4.9), (4.10) использовался в работах [65, 66, 172]. Вариант попеременно-треугольного метода, описанный в п. 4.5, предложен в [173] и применялся в задачах со свободной границей, начиная с работы [66]. Метод переменных направлений использовался при решении задачи со свободной границей в теории джозефсоновских переходов [96, 97].

## § 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ

### 5.1. Общая схема метода фиктивных областей

Ранее мы рассмотрели краевые задачи со свободной границей в прямоугольной области  $\Omega$ . Численное решение задач в нерегулярных областях является в настоящее время важным и интенсивно разрабатываемым направлением вычислительной математики. Не останавливаясь на сколько-нибудь подробном обзоре приближенных методов решения эллиптических уравнений в произвольных областях (см., например, [121—123]), отметим некоторые из них.

Естественным подходом к решению задач в нерегулярных областях являются преобразования переменных, например конформные или же рассмотренные в гл. III. Другой важный класс алгоритмов строится на использовании нерегулярных сеток [140, 174]. Хорошо приспособлен для этой цели метод конечных элементов [67, 175]. При решении задач в составных областях большое распространение получили методы разделения областей в различных модификациях [121—123]. Сюда же можно отнести и алгоритмы, которые построены на альтернирующем методе Шварца (см., например, [176—178]). Определенные возможности при решении краевых задач в нерегулярных областях имеют вариационные методы, использующие теорию  $R$ -функций [179, 180].

Большая группа методов строится на идее дополнения исходной расчетной области до некоторой регулярной. Это прежде всего метод фиктивных областей, получивший распространение в вычислительной практике, начиная с работ [181, 182], и его матричный вариант, известный под названием метода фиктивных компонент, фиктивных неизвестных [167, 122, 183, 184]. Фактически та же идея использовалась нами при приближенном решении однофазных задач со свободной границей методом штрафа.

Рассмотрим общую схему метода фиктивных областей. Пусть в области  $D$  решается некоторое уравнение

$$Lu = f(x), \quad x \in D, \quad (5.1)$$

с условием на границе

$$lu = 0, \quad x \in \partial D. \quad (5.2)$$

Для приближенного решения задачи (5.1), (5.2) рассмотрим другую задачу в области  $\Omega$ , целиком содержащей  $D$ :

$$L_\sigma u_\sigma = f^\sigma(x), \quad x \in \Omega \quad (D \subset \Omega), \quad (5.3)$$

$$l_\sigma u_\sigma = 0, \quad x \in \partial \Omega. \quad (5.4)$$

При определенном выборе операторов  $L_\sigma$ ,  $l_\sigma$  и правой части  $f^\sigma(x)$  в расширенной области  $\Omega$  получим, что при  $\sigma \rightarrow 0$   $u_\sigma(x) \rightarrow u(x)$ ,  $x \in D$ . Малый параметр  $\sigma$  характеризует близость приближенного решения  $u_\sigma(x)$  к точному  $u(x)$ . Общая ситуация, характерная для всех вариантов метода фиктивных областей, состоит в том, что уравнение (5.3) в расширенной области  $\Omega$  содержит малые (большие) коэффициенты, разрывные при переходе границы  $\partial D$ . Это обстоятельство порождает определенные сложности как при построении разностных схем для краевой задачи (5.3), (5.4), так и при итерационном решении разностных задач.

Следует заметить, что вопросы обоснования сходимости дифференциального решения  $u_\sigma(x)$  к точному при  $\sigma \rightarrow 0$  во многих вариантах метода фиктивных областей проработаны с большой тщательностью. О достижениях в этом направлении можно судить по обзору [185]. Для построения разностных схем для задачи (5.3), (5.4) с сильнопеременными и разрывными коэффициентами привлекаются последние достижения теории разностных схем [186—188]. С точки зрения практической реализации наиболее важным является вопрос об эффективной вычислительной реализации метода фиктивных областей, т. е. проблема создания итерационных методов решения сеточных уравнений с малыми (большими) коэффициентами. Эта проблема будет обсуждаться нами несколько позже.

Специально отметим несомненное преимущество метода фиктивных областей перед другими методами решения краевых задач в нерегулярных областях. Оно связано с высокой автоматизацией программирования, так как переход от одной задачи к другой осуществляется только с помощью задания новых коэффициентов уравнения. Это позволяет на основе метода фиктивных областей строить комплексы и пакеты прикладных программ [189]. Как следствие, основной недостаток метода фиктивных областей — его невысокая точность.

## 5.2. Задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

Приведем основные варианты метода фиктивных областей для решения эллиптических задач и соответствующие оценки скорости сходимости приближенного решения  $u_\sigma(x)$  к точному  $u(x)$ . Рассмотрим линейное эллиптическое уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}^0 \frac{\partial u}{\partial x_j} - a^0(x)u = -f^0(x), \quad x \in D, \quad (5.5)$$

с достаточно гладкими коэффициентами  $a^0(x)$ ,  $a_{ij}^0(x)$ , правой

частью  $f^0(x)$  и границей  $\partial D$ , причем  $a^0(x) \geq 0$ ,  $x \in D$ . Дополнительно потребуем выполнения следующего условия на границе:

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial D. \quad (5.6)$$

Остановимся вначале на варианте метода фиктивных областей, в котором при продолжении коэффициентов в фиктивную область  $\Omega \setminus D$  разрывны коэффициенты при старших производных. Вместо (5.5), (5.6) решается задача

$$\mathcal{L}_\sigma u_\sigma \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}^\sigma(x) \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_j} - a^\sigma(x) u = -f^\sigma(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.7)$$

$$u_\sigma(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5.8)$$

В первом варианте фиктивных областей (продляжение по старшим коэффициентам) имеем

$$a_{ij}^\sigma(x) = \begin{cases} a_{ij}^0(x), & x \in D, \\ \sigma^{-2} \delta_{ij}, & x \in \Omega \setminus D, \end{cases} \quad (5.9)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Для коэффициента  $a^\sigma(x)$  можно использовать выражение

$$a^\sigma(x) = \begin{cases} a(x), & x \in D, \\ 0, & x \in \Omega \setminus D. \end{cases} \quad (5.10)$$

Будем считать, что правая часть  $f^\sigma(x)$  продолжается в фиктивную область следующим образом:

$$f^\sigma(x) = \begin{cases} f^0(x), & x \in D, \\ 0, & x \in \Omega \setminus D. \end{cases} \quad (5.11)$$

Для решения задачи (5.7)–(5.11) справедлива следующая оценка близости к точному решению  $u(x)$  для задачи (5.5), (5.6):

$$\|u_\sigma(x) - u(x)\|_{W_2^1(D)} \leq c_1 \sigma^2. \quad (5.12)$$

Доказательство (5.12) можно найти в [190] (см. соответствующие ссылки в [185]).

Во втором варианте метода фиктивных областей коэффициенты при старших производных продолжают непрерывно в  $\Omega \setminus D$ :

$$a_{ij}^\sigma(x) = a_{ij}^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.13)$$

а для  $a^\sigma(x)$  используется выражение

$$a^\sigma(x) = \begin{cases} a^0(x), & x \in D, \\ \sigma^{-2}, & x \in \Omega \setminus D. \end{cases} \quad (5.14)$$

Обратим внимание на то, что аналогичное продолжение используется и при решении задач со свободной границей методом штрафа (п. 3.3). При продолжении по младшим коэффициентам (5.11), (5.13), (5.14) соответствующая оценка точности имеет вид [190]

$$\|u_\sigma(x) - u(x)\|_{W_2^1(D)} \leq c_2 \sigma. \quad (5.15)$$

Отметим, что приведенные оценки (5.12), (5.15) неулучшаемы по порядку  $\sigma$ .

### 5.3. Задача Неймана

В качестве второго примера рассмотрим уравнение (5.5) с условиями второго рода. Пусть вместо (5.4) выполнено

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \partial D, \quad (5.16)$$

где конормальная производная  $\partial/\partial \nu$  определяется согласно (2.14) (гл. I). Для приближенного решения задачи (5.5), (5.16) также используется метод фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам, но вместо (5.9) полагаем

$$a_{ij}^\sigma(x) = \begin{cases} a_{ij}^0(x), & x \in D, \\ \sigma^2 \delta_{ij}, & x \in \Omega \setminus D. \end{cases} \quad (5.17)$$

Для решений задач (5.5), (5.16) и (5.7), (5.8), (5.10), (5.11), (5.17) в расширенной области  $\Omega$  справедлива оценка [191]

$$\|u_\sigma(x) - u(x)\|_{W_2^1(D)} \leq c_3 \sigma^2,$$

аналогичная выписанном ранее (5.12), (5.15).

В настоящее время имеются обширные результаты по обоснованию метода фиктивных областей для многих задач математической физики, в частности и для начально-краевых задач для уравнений параболического типа.

### 5.4. Численная реализация

При применении метода фиктивных областей необходимо решать задачу типа (5.7), (5.8) с сильно переменными коэффициентами. Это необходимо учитывать не только при по-

строении разностных схем для задачи в расширенной области, но и при итерационном решении соответствующих сеточных эллиптических уравнений. С этой точки зрения различные варианты метода фиктивных областей для одной и той же задачи могут быть неравноценны. Так, например, при продолжении по младшим коэффициентам мы приходим к задачам типа (5.7), (5.8) с разрывным и сильно меняющимся коэффициентом  $u^\sigma(x)$ . Для таких эллиптических задач в § 4 построены модификации основных итерационных методов решения сеточных эллиптических уравнений, скорость которых не зависит от этого коэффициента. Таким образом, вычислительная работа для решения краевой задачи в произвольной области при применении метода фиктивных областей будет такой же, как и при решении этой задачи в объемлющей регулярной области, или же незначительно возрастет.

Этого нельзя сказать об итерационных методах решения задач типа (5.7), (5.8) с сильно переменными и разрывными коэффициентами  $a_{ij}^\sigma(x)$ , т. е. при применении варианта метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам. Как показывает вычислительная практика, для таких задач следует отдать предпочтение попеременно-треугольному методу [119] в модификации [170]. В этом случае зависимость числа итераций  $n$  от параметра  $\sigma$  хотя и наблюдается, но она достаточно слабая. Другие итерационные методы реализации метода фиктивных областей обсуждаются в [192].

## § 6. ПРИМЕР 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ДАМБУ

### 6.1. Постановка задачи

Общая постановка задачи стационарной двумерной фильтрации через дамбу с неизвестной границей смачивания дана

в гл. I (п. 1.3). Рассмотрим более простую задачу, когда поперечное сечение дамбы представляет собой прямоугольник  $\Omega$  (рис. 28), причем  $\Omega_+$  — его смоченная часть, а  $\Omega_-$  — несмоченная. Условия (1.25) — (1.31) дают в нашем случае следующую краевую задачу:

$$\Delta p = 0, \quad x \in \Omega_+, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial N}(x) = -\rho g,$$

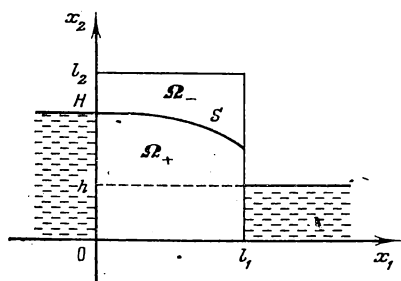


Рис. 28. Фильтрация через дамбу прямоугольного сечения

$$x \in \Gamma_+ (x_2 = 0), \quad (6.2)$$

$$p(x) = \rho g (H - x_2), \quad x \in \Gamma_1 (x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H), \quad (6.3)$$

$$p(x) = \rho g (h - x_2), \quad x \in \Gamma_2 (x_1 = l_1, 0 \leq x_2 \leq h), \quad (6.4)$$

$$p(x) = 0, \quad x \in \Gamma_3 (x_1 = l_1, h < x_2 \leq H), \quad (6.5)$$

$$p(x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial N} (p + \rho g x_2) = 0, \quad x \in S. \quad (6.6)$$

Относительно обозначений смотри § 1 гл. I.

Отметим, что для решения задачи с прямоугольным сечением можно использовать метод фиктивных областей, о чем шла речь в предыдущем параграфе.

## 6.2. Преобразование Байокки

Для численного решения задачи (6.1)–(6.6) используем возможность ее сведения к новой задаче, которая, в частности, допускает формулировку в виде вариационного неравенства [52] и более удобна для численного исследования. Введем вспомогательную функцию

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_- (x_2 > \varphi(x_1)), \\ \int_{x_2}^{\varphi(x_1)} p(x_1, \eta) d\eta, & x \in \Omega_+ (x_2 < \varphi(x_1)), \end{cases}$$

где  $x_2 = \varphi(x_1)$  — уравнение неизвестной границы  $S$ . Задача для  $u(x)$  имеет вид

$$\Delta u = \rho g, \quad x \in \Omega_+, \quad (6.7)$$

$$u(x) = \rho g \frac{H^2}{2} + \frac{\rho g x_1}{2} (h^2 - H^2), \quad x \in \Gamma_+, \quad (6.8)$$

$$u(x) = \rho g \frac{(H - x_2)^2}{2}, \quad x \in \Gamma_1, \quad (6.9)$$

$$u(x) = \rho g \frac{(h - x_2)^2}{2}, \quad x \in \Gamma_2, \quad (6.10)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_3. \quad (6.11)$$

Наиболее существенным моментом перехода к задаче для вспомогательной функции  $u(x)$  является то, что для  $u(x)$  на сво-

бодной границе  $S$  ставятся вместо (6.6) однородные условия вида

$$u(x)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x)=0, \quad x \in S. \quad (6.12)$$

Такой подход использовался нами в работе [193].

### 6.3. Вычислительный алгоритм

Задачу (6.7)—(6.12) будем решать методом штрафа (см. п. 3.3). Рассмотрим задачу для приближенного решения, которое обозначим  $u_\varepsilon(x)$ . Во всей области  $\Omega$  функция  $u_\varepsilon(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_\varepsilon - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)u_\varepsilon = \rho g, \quad x \in \Omega, \quad (6.13)$$

где

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = \begin{cases} 0, & u_\varepsilon \geq 0, \\ \varepsilon^{-2}, & u_\varepsilon < 0. \end{cases}$$

Уравнение (6.13) дополняется граничными условиями (6.8)—(6.11), а на оставшейся части  $\partial\Omega$  положим

$$u(x)=0, \quad x \in \Gamma_- (\Gamma_- = \partial\Omega_- - S). \quad (6.14)$$

При таких условиях  $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$  в  $\Omega_+$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а линия  $u_\varepsilon(x) = 0$  приближенно определяет неизвестную границу смачивания.

Для численного решения нелинейного уравнения (6.13) с граничными условиями (6.8)—(6.11), (6.14) применяется итерационный процесс (4.9); (4.10). Линейная задача решается с использованием попеременно-треугольного метода в сочетании с методом сопряженных градиентов, который описан в п. 4.5.

### 6.4. Примеры расчетов

Приведем некоторые результаты расчетов, выполненных для поставленной задачи (6.1)—(6.6) при  $\rho g = 1$  (выбор системы единиц) при следующих значениях параметров задачи:  $H = 0,8$ ,  $l_2 = 1$ ,  $l_1 = 1,0(0,5)$  — и переменной высоте  $h$ . Заметим, что давление  $p(x)$  определяется по известной функции  $u(x)$  по формуле

$$p(x) = - \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad x \in \Omega_+.$$

На рис. 29 изображены линии уровня давления (изобары) для задачи с  $l_1 = 1$ ,  $h = 0,2$ . Поведение границы смачивания  $S$  при изменении  $h$  иллюстрируется на рис. 30. Здесь же штрихо-

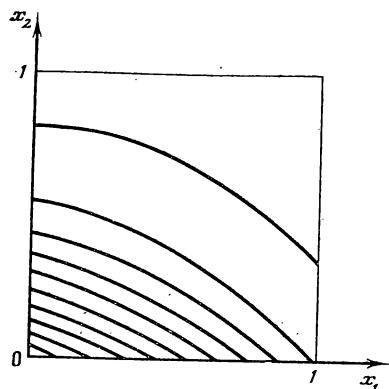


Рис. 29. Изобары через равные интервалы для задачи с  $H=0,8$ ,  $h=0,2$

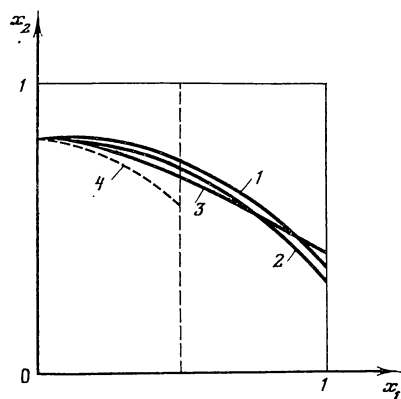


Рис. 30. Граница смачивания при  $H=0,8$ : 1 —  $h=0$ ; 2 —  $0,2$ ; 3 —  $0,4$ ; 4 —  $0$  ( $l_1=0,5$ )

вой линией отмечены данные расчетов для дамбы вдвое меньше ширины ( $l_1=0,5$ ). Расчеты выполнены по сетке ( $51 \times 51$ ) на ЭВМ БЭСМ-6 при достаточно малом значении параметра штрафа  $\varepsilon$  ( $\varepsilon^{-2}=10^{10}$ ).

## ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

## § 1. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

## 1.1. Постановка задачи об изгибе стержней

В качестве модельной рассмотрим задачу изгиба тонкого однородного цилиндрического стержня [60, 194]. В простейшем случае прогиб  $u(x)$ , где  $x$  — координата вдоль стержня, под действием суммарного по сечению стержня  $S$  усилия  $q(x)$  определяется из уравнения равновесия (сравните с уравнением (1.35) для прогиба тонких пластин, п. 1.4 гл. I)

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = -\frac{q(x)}{D}, \quad 0 < x < l, \quad (1.1)$$

где  $D$  — изгибная жесткость стержня.

В зависимости от заделки краёв стержня уравнение (1.1) дополняется различными граничными условиями при  $x=0, l$ . Например,

$$u(x) = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad x = 0, l, \quad (1.2)$$

соответствует условию жесткой заделки. Другой случай (шарнирное закрепление) приводит к задаче для уравнения (1.1) с дополнительными условиями

$$u(x) = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad x = 0, l. \quad (1.3)$$

Предположим теперь, что на некотором расстоянии  $a$  от стержня находится жесткое препятствие (рис. 31). Тогда при

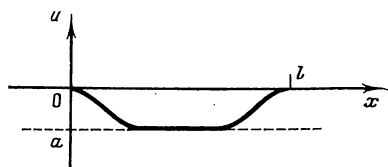


Рис. 31. Влияние жесткого основания на изгиб упругого стержня

достаточно больших нагрузках  $q(x)$  будет существовать область контакта стержня с препятствием. Таким образом, приходим к задаче (1.1) — (1.3) с дополнительным условием

$$u(x) \geq a, \quad 0 < x < l. \quad (1.4)$$

Аналогично ставятся задачи с ограничениями для неоднородного стержня ( $S=S(x)$ ), когда уравнение (1.1) заменяется на уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2}{dx^2} k(x) \frac{d^2 u}{dx^2} = q(x), \quad 0 < x < l,$$

а также когда граница жесткого препятствия не является плоской.

## 1.2. Метод штрафа

Для решения задачи с ограничениями (1.1), (1.2), (1.4) (или (1.1), (1.3), (1.4)) можно использовать различные подходы. На эти задачи сравнительно просто переносятся методы, которые обсуждались в гл. IV применительно к уравнениям второго порядка. Мы не будем останавливаться на релаксационных методах с проектированием на множество ограничений типа (1.4), а обратимся к методу штрафа, который представляется более перспективным. Как и ранее, будем ориентироваться на решение соответствующей краевой задачи для нелинейного уравнения Эйлера:

Рассмотрим задачу (1.1), (1.4) с условиями Дирихле (1.2). Определим  $K$  как множество достаточно гладких функций таких, что

$$K = \left\{ v \mid v(x) \geq a, \quad 0 < x < l, \quad v(x) = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad x = 0, l \right\}. \quad (1.5)$$

Тогда задача (1.1), (1.2), (1.4) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l \frac{\bar{q}(x)}{D} v(x) dx \quad (1.6)$$

на множестве  $K$ . Таким образом,

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v). \quad (1.7)$$

Для решения задачи условной минимизации (1.5)–(1.7) применим метод штрафа (п. 3.3 гл. IV). Рассмотрим минимум функционала

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{2} \int_0^l \beta_\varepsilon(v) (v - a)^2 dx, \quad (1.8)$$

где коэффициент штрафа взят в виде

$$\beta_\varepsilon(v) = \begin{cases} 0, & v \geq a, \\ \varepsilon^{-2}, & v < a. \end{cases} \quad (1.9)$$

Решение задачи минимизации (1.8), (1.9), которое обозначим  $u_\varepsilon(x)$ , дает приближенное решение исходной задачи, причем условие  $u_\varepsilon(x) \leq a$  определяет зону контакта.

Уравнение Эйлера соответствующее задаче минимизации функционала  $J_\varepsilon(v)$ , имеет вид

$$-\frac{d^4 u_\varepsilon}{dx^4} + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)(u_\varepsilon - a) = \frac{q(x)}{D}, \quad 0 < x < l. \quad (1.10)$$

Дополним его условиями

$$u_\varepsilon(x) = 0, \quad \frac{du_\varepsilon}{dx} = 0, \quad x = 0, l, \quad (1.11)$$

на концах стержня. Существует определенная механическая трактовка уравнения (1.10). Оно описывает изгиб стержня в условиях, когда на расстоянии  $a$  от него находится упругая среда с коэффициентом упругости, пропорциональным  $\varepsilon^{-2}$ . Случай  $\varepsilon \rightarrow 0$  соответствует жесткому препятствию.

Для решения нелинейной краевой задачи (1.10), (1.11) используем итерационный процесс

$$-\frac{d^4 u_\varepsilon^{s+1}}{dx^4} + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s)(u_\varepsilon^{s+1} - a) = \frac{q(x)}{D}, \quad 0 < x < l, \quad (1.12)$$

$$u_\varepsilon^{s+1}(x) = 0, \quad \frac{du_\varepsilon^{s+1}}{dx} = 0, \quad x = 0, l, \quad (1.13)$$

аналогичный тому, который применялся в задачах для уравнения второго порядка.

### 1.3. Численное решение линейной задачи

Для решения линейной задачи (1.12), (1.13) используют разностные методы. Достаточно подробное исследование соответствующих разностных схем для уравнений четвертого порядка содержится в книге [125]. Здесь мы коснемся лишь некоторых моментов, которые будут нам полезны при рассмотрении двумерных задач.

Введем равномерную сетку с шагом  $h$

$$\bar{\omega}_h = \{x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\}.$$

Для построения разностной схемы для уравнения (1.12) воспользуемся следующим приемом [124]. Продолжим сетку  $\omega_h$

слева и справа равномерно на один узел. На расширенной сетке аппроксимируем (1.12) обычным образом:

$$y_{xxxx}^- + d(x)y = \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad (1.14)$$

где

$$y_{xxxx}^- = \frac{1}{h^4} (y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)),$$

а  $\omega_h$  — множество внутренних узлов. Для аппроксимации коэффициента  $\beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s)$  и правой части уравнения (1.12) можно использовать выражения

$$d(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s) dx, \quad \varphi(x) = d(x)\bar{a} + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{q(x)}{D} dx.$$

Граничные условия аппроксимируем с использованием фиктивных узлов. Например, для (1.13) получим

$$y(x) = 0, \quad y(x-h) = y(x+h), \quad x=0, l. \quad (1.15)$$

Аналогично аппроксимируются однородные условия второго рода (1.3):

$$y(x) = 0, \quad y(x-h) = -y(x+h), \quad x=0, l. \quad (1.16)$$

Определим на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на границе, оператор  $A_0$  так, что

$$A_0 y = -y_{xx}, \quad x \in \omega_h, \quad y(x) = 0, \quad x=0, l. \quad (1.17)$$

Разностную задачу (1.14), (1.16) с учетом обозначений (1.17) можно записать в виде

$$A_0^2 y + d(x)y = \varphi(x), \quad x \in \omega_h. \quad (1.18)$$

Аналогично для (1.14), (1.15) получим

$$A_0^2 y + (d(x) + \rho(x))y = \varphi(x), \quad x \in \omega_h. \quad (1.19)$$

Здесь  $\rho(x)$  — сеточная функция, отличная от нуля только в приграничных узлах, причем

$$\rho(x) = \begin{cases} 2h^{-4}, & x = x_1, x_{N-1}, \\ 0, & x_1 < x < x_{N-1}, \end{cases} \quad (1.20)$$

Таким образом, переход от разностной задачи с условиями второго рода (1.16) к задаче с условиями первого рода (1.15) привел к появлению слагаемого  $\rho(x)y$  в (1.19). Такая же ситуация имеет место и в двумерной задаче для эллиптических уравнений четвертого порядка.

Для численного решения разностной задачи (1.18) (или (1.19)) можно использовать метод пятиточечной прогонки, подробное описание которого содержится в [119].

## § 2. МЕТОД ШТРАФА В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

### 2.1. Постановка задачи со свободной границей

Будем рассматривать модельную задачу о прогибе тонкой однородной пластины с сечением  $\Omega$  под действием поперечной нагрузки (см. более подробно в п. 1.4 гл. I). В этом случае в части области  $\Omega_+$ , где пластина не касается жесткого препятствия, функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in \Omega_+, \quad (2.1)$$

где  $f(x) = q(x)/D$ . На границе  $\partial\Omega$  предполагаются выполненными условия жесткого защемления

$$u(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

На неизвестной границе контакта  $S$  справедливы соотношения

$$u(x) = a, \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x) = 0, \quad \Delta u = 0, \quad x \in S, \quad (2.3)$$

которые вытекают из (1.39) (гл. I).

### 2.2. Вариационная задача и метод штрафа

Задача (2.1) — (2.3) сводится к задаче минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad (2.4)$$

на множестве достаточно гладких функций  $K$ , для которых

$$K = \left\{ v \mid v(x) \geq a, \quad x \in \Omega, \quad v(x) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \right\}. \quad (2.5)$$

Для приближенного решения задачи условной минимизации снова используем метод штрафа. Будем искать минимум функционала

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta_\varepsilon(v) (v - a)^2 dx, \quad (2.6)$$

где  $\beta_\varepsilon(v)$  задана с помощью соотношения (1.9). Определим  $u_\varepsilon(x)$  из

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon(v). \quad (2.7)$$

Нетрудно убедиться, что решение задачи (2.6), (2.7) удовлетворяет следующему уравнению уже во всей области  $\Omega$ :

$$\Delta^2 u_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)(u_\varepsilon - a) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.8)$$

с граничными условиями

$$u_\varepsilon(x) = 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) описывает прогиб тонкой пластины над упругим основанием, находящимся на расстоянии  $a$  от пластины [195, 196].

### 2.3. Итерационный процесс

Для приближенного решения нелинейной краевой задачи применим итерационный метод Ньютона — Канторовича (см. п. 1 гл. IV). В этом случае на каждой  $(s+1)$ -й итерации необходимо решить следующую линейную задачу:

$$\Delta^2 u_\varepsilon^{s+1} + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s)(u_\varepsilon^{s+1} - a) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.10)$$

$$u_\varepsilon^{s+1}(x) = 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon^{s+1}}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.11)$$

Разностные методы решения этой задачи будут рассмотрены ниже.

### 2.4. Метод фиктивных областей для решения задач в произвольных областях

Большие сложности возникают при решении эллиптических уравнений четвертого порядка в нерегулярных областях. В некоторых случаях можно применять метод фиктивных областей, некоторые варианты которого применительно к краевым задачам для уравнений второго порядка рассмотрены в § 5 гл. IV.

Рассмотрим следующую задачу в произвольной области  $D$ :

$$\Delta^2 u = f^0(x), \quad x \in D, \quad (2.12)$$

$$u(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in \partial D. \quad (2.13)$$

При применении варианта метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам задача в регулярной области  $\Omega$  ( $D \subset \Omega$ ) имеет [197] вид

$$\Delta^2 u_\sigma + a^\sigma(x) u_\sigma = f^\sigma(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.14)$$

$$u_\sigma(x) = 0, \quad \frac{\partial u_\sigma}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.15)$$

Здесь коэффициент  $a^\sigma(x)$  определен выражением

$$a^\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x \in D, \\ \sigma^{-2}, & x \in \Omega \setminus D, \end{cases}$$

а правая часть, например,

$$f^\sigma(x) = \begin{cases} f^0(x), & x \in D, \\ 0, & x \in \Omega \setminus D. \end{cases}$$

Для погрешности приближенного решения задачи (2.12), (2.13) справедлива оценка

$$\|u_\sigma(x) - u(x)\|_{W^2_2(D)} \leq c_4 \sigma^2.$$

Аналогичные оценки могут быть получены и в других соболевских пространствах (см., например, [185]).

Задача (2.14), (2.15) полностью аналогична линейаризованной задаче (2.10), (2.11), что позволяет строить однородные вычислительные алгоритмы при совместном использовании метода фиктивных областей и метода штрафа.

Описанный подход к решению задач с ограничениями для эллиптических уравнений четвертого порядка предложен в работе [64], где также приведены некоторые примеры расчетов.

### § 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

#### 3.1. Разностная задача

Использование метода штрафа, а также метода фиктивных областей приводит к необходимости численного решения линейной задачи Дирихле для эллиптического уравнения четвертого порядка

$$\Delta^2 v + \beta(x) v = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$v(x) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.2)$$

где (см. (2.10), (2.11))

$$\beta(x) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s), \quad \varphi(x) = f(x) + a\beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s).$$

В случае применения варианта метода фиктивных областей (2.14), (2.15) имеем

$$\beta(x) = a^\sigma(x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s), \quad \varphi(x) = f^\sigma(x) + a\beta_\varepsilon(u_\varepsilon^s).$$

Для приближенного решения задачи (3.1), (3.2) введем обычным образом равномерную сетку  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ . Аппроксимацию уравнения (3.1) в приграничных узлах и граничных условий (3.2) проведем с использованием расширенной сетки (фиктивные узлы с  $i = -1, N_1 + 1$  и  $j = -1, N_2 + 1$ ) подобно тому, как это сделано в одномерном примере (п. 1.3). Используя ранее введенные обозначения для разностного оператора Лапласа, определим оператор  $A_0$  аналогично (1.17) следующим образом:

$$A_0 y = -\Delta y, \quad x \in \omega_h, \quad y(x) = 0, \quad x \in \gamma_h. \quad (3.3)$$

Для  $A_0^2$  имеем

$$A_0^2 y = \Delta^2 y, \quad x \in \omega_h, \quad y(x) = 0, \quad \Delta y = 0, \quad x \in \gamma_h. \quad (3.4)$$

Разностная задача, аппроксимирующая (3.1), (3.2), в принятых обозначениях записывается в виде

$$A y = \varphi, \quad (3.5)$$

где

$$A = A_0^2 + c(x)E. \quad (3.6)$$

Здесь

$$c(x) = d(x) + \rho(x),$$

а сеточная функция  $\rho(x)$ , определяемая аналогично одномерному случаю, отлична от нуля лишь в приграничных узлах:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & i = 2, 3, \dots, N_1 - 2, \quad j = 2, 3, \dots, N_2 - 2, \\ 2h_1^{-4}, & i = 1, N_1 - 1, \quad j = 2, 3, \dots, N_2 - 2, \\ 2h_2^{-4}, & i = 2, 3, \dots, N_1 - 2, \quad j = 1, N_2 - 1, \\ 2(h_1^{-4} + h_2^{-4}), & i = 1, N_1 - 1, \quad j = 1, N_2 - 1. \end{cases}$$

Случай  $\rho(x) \equiv 0$  соответствует заданию на  $\partial\Omega$  условий второго рода

$$v(x) = 0, \quad \Delta v = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

при их аппроксимации со вторым порядком.

### 3.2. Попеременно-треугольный метод для уравнений четвертого порядка

Рассмотрим вопрос о построении попеременно-треугольного итерационного метода для решения разностной задачи (3.5), (3.6). Ранее в достаточно общей форме рассмотрен вопрос о построении модификаций данного итерационного метода на случай коэффициентов  $c(x) \neq 0$ . Поэтому сейчас необходимо остановиться лишь на задаче (3.5) с  $A = A_0^2$ .

Определим операторы

$$A_\alpha y = -\Lambda_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \omega_h, \quad (3.7)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma_h.$$

Для них справедливы следующие оценки (см. п. 4.2 гл. IV):

$$\delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \delta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.8)$$

Так как

$$A_0 = A_1 + A_2,$$

а операторы  $A_1, A_2$  перестановочны, то

$$R \leq A_0^2 \leq 2R, \quad (3.9)$$

где

$$R = A_1^2 + A_2^2. \quad (3.10)$$

Сделаем следующее замечание, касающееся перехода от  $A_0^2$  к оператору  $R$ . При построении попеременно-треугольного итерационного метода для оператора  $R$  нет необходимости в обращении трехдиагональной матрицы, как это имело бы место при использовании исходного оператора  $A_0^2$ . Кроме того, для  $R$  облегчается решение вопросов, связанных с распараллеливанием алгоритма попеременно-треугольного метода (см., например, [198, 199]). Кроме того, число итераций при решении задачи (3.5) с  $A = R$  возрастает в соответствии с теорией метода [119] только в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с решением задачи для  $A = A_0^2$ .

Выберем  $B$  в попеременно-треугольном методе (п. 4.5 гл. IV) в виде

$$B = (E + \omega_0 R_1)(E + \omega_0 R_2), \quad (3.11)$$

где

$$R = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2^*.$$

Для операторов  $R_\alpha, \alpha = 1, 2$ , с учетом  $y(x) = \Lambda y = 0, x \in \gamma_h$ , получим представления

$$R_1 y = \frac{1}{h_1^2} \Lambda_1 y_{i+1,j} + \frac{1}{h_2^2} \Lambda_2 y_{i,j+1} - \frac{2}{h_1^3} y_{x_1} - \frac{2}{h_2^3} y_{x_2}, \quad (3.12)$$

$$R_2 y = \frac{1}{h_1^2} \Lambda_1 y_{i-1,j} + \frac{1}{h_2^2} \Lambda_2 y_{i,j-1} + \\ + \frac{2}{h_1^3} y_{\bar{x}_1} + \frac{2}{h_2^3} y_{\bar{x}_2}, \quad x \in \omega_h, \quad (3.13)$$

где использованы обычные обозначения теории разностных схем [124].

Оценим постоянные  $\bar{\delta}$  и  $\bar{\Delta}$  в неравенствах

$$R \geq \bar{\delta} E, \quad R_1 R_2 \leq \frac{\bar{\Delta}}{4} E, \quad \bar{\delta} > 0, \quad (3.14)$$

причем  $\omega_0 = 2/\sqrt{\bar{\delta}\bar{\Delta}}$  в (3.11). С учетом (3.8), (3.10) для первого неравенства (3.14) найдем

$$\bar{\delta} = \delta_1^2 + \delta_2^2. \quad (3.15)$$

Оценим теперь величину  $\bar{\Delta}$  во втором неравенстве (3.14). Имеем

$$(R_1 R_2 y, y) = ((R_2 y)^2, 1) = \\ = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left( \frac{1}{h_1^2} \Lambda_1 y_{i-1,j} + \frac{1}{h_2^2} \Lambda_2 y_{i,j-1} + \frac{2}{h_1^3} y_{\bar{x}_1} + \frac{2}{h_2^3} y_{\bar{x}_2} \right)^2 h_1 h_2. \quad (3.16)$$

Используя  $\varepsilon$ -неравенство, из (3.16) получим

$$(R_1 R_2 y, y) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left( \frac{1}{h_1^2} \Lambda_1 y_{i-1,j} + \frac{1}{h_2^2} \Lambda_2 y_{i,j-1} \right)^2 h_1 h_2 + \\ + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left( \frac{2}{h_1^3} y_{\bar{x}_1} + \frac{2}{h_2^3} y_{\bar{x}_2} \right)^2 h_1 h_2. \quad (3.17)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (3.17) применяем неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) (b_1^2 + b_2^2),$$

которое дает

$$\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left( \frac{1}{h_1^2} \Lambda_1 y_{i-1,j} + \frac{1}{h_2^2} \Lambda_2 y_{i,j-1} \right)^2 h_1 h_2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \frac{1}{h_1^4} + \frac{1}{h_2^4} \right) \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} ((\Lambda_1 y_{i-1,j})^2 + (\Lambda_2 y_{i,j-1})^2) h_1 h_2 \leq \\
&\leq \left( \frac{1}{h_1^4} + \frac{1}{h_2^4} \right) (Ry, y).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь использовано соотношение

$$(Ry, y) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} ((\Lambda_1 y)^2 + (\Lambda_2 y)^2) h_1 h_2.$$

Для оценки второго слагаемого в (3.17) используем оценки

$$\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (y_{x_\alpha})^2 h_1 h_2 \leq (A_\alpha y, y), \quad \alpha = 1, 2, \tag{3.19}$$

доказательство которых можно найти, например, в [119, 124]. Из (3.7), (3.8) вытекает

$$\delta_\alpha (A_\alpha y, y) \leq (A_\alpha^2 y, y) \leq \Delta_\alpha (A_\alpha y, y), \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.20}$$

Неравенства (3.19), (3.20) дают

$$\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (y_{x_\alpha})^2 h_1 h_2 \leq \frac{1}{\delta_\alpha} (A_\alpha^2 y, y), \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.21}$$

Принимая во внимание (3.21) и проделав выкладки, аналогичные (3.17), (3.18), получим

$$\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left( \frac{2}{h_1^3} y_{x_1} + \frac{2}{h_2^3} y_{x_2} \right)^2 h_1 h_2 \leq 4 \left( \frac{1}{\delta_1 h_1^6} + \frac{1}{\delta_2 h_2^6} \right) (Ry, y). \tag{3.22}$$

Подстановка (3.18), (3.22) в (3.17) дает

$$\begin{aligned}
(R_1 R_2 y, y) &\leq ((1 + \varepsilon) (h_1^{-4} + h_2^{-4}) + \\
&+ \frac{4(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} (h_1^{-6} \delta_1^{-1} + h_2^{-6} \delta_2^{-1})) (Ry, y) = \frac{\bar{\Delta}_\varepsilon}{4} (Ry, y).
\end{aligned}$$

Выбирая  $\varepsilon$  из условия минимума  $\bar{\Delta}_\varepsilon$ , получим для  $\bar{\Delta} = \min_{\varepsilon > 0} \bar{\Delta}_\varepsilon$  выражение

$$\bar{\Delta} = 4 \left( \sqrt{h_1^{-4} + h_2^{-4}} + 2 \sqrt{h_1^{-6} \delta_1^{-1} + h_2^{-6} \delta_2^{-1}} \right)^2. \tag{3.23}$$

С учетом (3.15), (3.23) для числа итераций при решении задачи (3.5) с  $A = A_0^2$  попеременно-треугольным методом (3.11) получим оценку

$$n \geq n_0(\varepsilon_0) = \frac{1}{2^4 \sqrt[4]{\eta}} \ln \frac{2}{\varepsilon_0}, \quad \eta = \frac{\bar{\delta}}{\Delta}. \quad (3.24)$$

Такая же оценка будет и при решении задачи (3.5), (3.6) с модификацией попеременно-треугольного метода согласно п. 4.5 гл. IV. Асимптотическая зависимость от числа узлов по одному направлению имеет вид

$$n = O(N \sqrt[4]{N}) \ln \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad N \sim N_1 \sim N_2,$$

что значительно хуже, чем при решении сеточных эллиптических уравнений второго порядка.

### 3.3. Второй вариант использования попеременно-треугольного метода

Рассмотрим итерационный метод решения разностной задачи (3.5), (3.6), основанный на применении попеременно-треугольного итерационного метода для уравнений второго порядка. Введем обозначения

$$A_c = A_0 + \frac{c(x)}{\Delta_0} E, \quad (3.25)$$

где  $\Delta_0 = \Delta_1 + \Delta_2$ . Для решения уравнения (3.5) применим попеременно-треугольный метод с оператором  $B$ , который строится по оператору  $A_c$ . С учетом результатов § 4 гл. IV имеем

$$B = (D_c + \omega_0 A_c^1) D_c^{-1} (D_c + \omega_0 A_c^2), \quad (3.26)$$

где

$$A_c = A_c^1 + A_c^2, \quad A_c^1 = (A_c^2)^*,$$

а диагональный оператор  $D_c$  представлен в виде

$$D_c = \left(1 + \frac{c(x)}{\delta_0 \Delta_0}\right) E, \quad \delta_0 = \delta_1 + \delta_2. \quad (3.27)$$

В этом случае справедливо операторное неравенство

$$\gamma_1^0 B \leq A_c \leq \gamma_2^0 B, \quad (3.28)$$

где

$$\gamma_1^0 = \frac{\delta_0}{2(1 + \sqrt[4]{\eta_0})}, \quad \gamma_2^0 = \frac{\delta_0}{4\sqrt[4]{\eta_0}}, \quad \eta_0 = \frac{\delta_0}{\Delta_0}.$$

Кроме того, из (3.6), (3.25) непосредственно находим

$$\delta_0 A_c \leq A \leq \Delta_0 A_c. \quad (3.29)$$

Объединяя (3.28), (3.29), получим необходимое двухстороннее неравенство

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$$

с параметрами

$$\gamma_1 = \frac{\delta_0^2}{2(1 + \sqrt{\eta_0})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta_0 \Delta_0}{4\sqrt{\eta_0}}.$$

В этом случае

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\eta_0 \sqrt{\eta_0}}{1 + \sqrt{\eta_0}}.$$

Поэтому при применении методов с чебышевским набором параметров для числа итераций  $n$  имеем оценку

$$n \geq n_0(\varepsilon_0) \approx \frac{1}{(4\eta_0)^{3/4}} \ln \frac{2}{\varepsilon_0}, \quad \eta_0 = \frac{\delta_0}{\Delta_0}. \quad (3.30)$$

Существенно, что и в данном варианте итерационного метода число итераций  $n$  не зависит от коэффициента  $c(x) \geq 0$ .

Сравнение двух вариантов попеременно-треугольного метода в эллиптических задачах четвертого порядка (3.5), (3.6) удобно провести для случая, когда  $l=l_1=l_2$ ,  $h=h_1=h_2$ ,  $N=N_1=N_2$ . Для  $\delta_\alpha$ ,  $\Delta_\alpha$  используем известные оценки [119, 124]

$$\delta_0 = \frac{16}{l^2}, \quad \Delta_0 = \frac{8}{h^2}. \quad (3.31)$$

Подстановка (3.31) в (3.30) дает

$$n \geq n_0(\varepsilon_0) \approx \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} N^{3/2} \ln \frac{2}{\varepsilon_0} \quad (3.32)$$

для варианта (3.26), (3.27) попеременно-треугольного итерационного метода. Для  $\bar{\delta}$  и  $\bar{\Delta}$  в (3.24) получим

$$\bar{\delta} = \frac{128}{l^4}, \quad \bar{\Delta} \approx 4h^{-4}N^2,$$

что дает ту же оценку числа итераций (3.32).

Таким образом, попеременно-треугольный метод, построенный непосредственно для сеточного эллиптического уравнения четвертого порядка, требует такого же числа итераций, что и метод, построенный на основе попеременно-треугольного метода для уравнений второго порядка. Однако последний реали-

зуется за меньшее число арифметических действий, поэтому он и использован в практических расчетах.

Попеременно-треугольный метод для эллиптических уравнений четвертого порядка обсуждается в [200]. Излагаемый вариант использования попеременно-треугольного метода для эллиптических уравнений второго порядка предложен в работе [64], другие способы выбора  $B$  экспериментально исследовались в [201, 202].

При численном решении задачи Дирихле для бигармонического уравнения в прямоугольнике плодотворно используется идея локального уточнения граничного условия для  $\Delta u$ . Например, отметим работы [203—205]. Применение метода конечных элементов позволяет использовать такой подход и для задач в нерегулярных областях. Достаточно широкое распространение получили прямые методы [206, 207] для задач в прямоугольнике.

#### § 4. ПРИМЕР 4. РАСЧЕТ ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

##### 4.1. Круглая пластина

Остановимся на некоторых расчетах прогиба тонких однородных пластин с ограничениями

$$u(x) \geq a, \quad x \in \Omega, \quad (4.1)$$

для различных параметров  $a$ . Вначале рассмотрим задачу для круглой пластины радиуса  $r_0 = 0,5$ , подверженной однородным нагрузкам. Пусть  $f(x) = -1$  в исходной задаче (2.1)—(2.3), тогда прогиб пластины определяется из решения следующей одномерной задачи с ограничениями:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{du}{dr} = -1, \quad \xi < r < r_0, \quad (4.2)$$

с условиями на краю

$$u(r) = 0, \quad \frac{du}{dr} = 0, \quad r = r_0, \quad (4.3)$$

а на границе контакта

$$u(r) = a, \quad \frac{du}{dr} = 0, \quad \frac{d^2u}{dr^2} = 0, \quad r = \xi. \quad (4.4)$$

При  $a < -2^{-10}$  пластина не касается препятствия и решение имеет вид

$$u(r) = -2^{-10} (1 - (2r)^2)^2.$$

Такая модельная задача использовалась нами при рассмотрении вопросов численного решения двумерных задач с ограничениями. Исходная расчетная область (круг) погружалась в квадрат

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}.$$

При решении задачи в  $\Omega$  использовался метод фиктивных областей (см. п. 2.4), а для задач с ограничениями — метод штрафа.

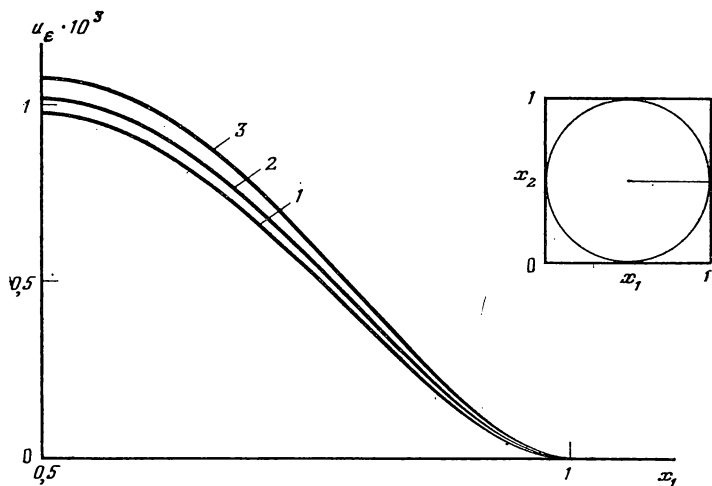


Рис. 32. Сравнение приближенного и точного решений при различном задании фиктивной области: 1 — точное решение, 2 — приближенное решение с фиктивной областью  $D_h''$ , 3 — приближенное решение с фиктивной областью  $D_h'$ .

На рис. 32 представлено точное и разностные решения задачи (4.2) — (4.4) без ограничений ( $a < -2^{-10}$ ). Здесь использовался метод фиктивных областей (2.14), (2.15), причем при переходе к разностной задаче использовалась простейшая аппроксимация коэффициента  $a^\sigma(x)$ :

$$a^\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x \in D_h, \\ \sigma^{-2}, & x \in \omega_h \setminus D_h. \end{cases}$$

В этом случае точность разностного решения зависит от того, насколько хорошо исходная расчетная область приближается к ступенчатой. В рассматриваемом примере использовались два приближения:

$$D_h' = \{x | x \in \omega_h, (x_{1i} - r_0)^2 + (x_{2j} - r_0)^2 \leq r_0^2\},$$

когда все узлы ступенчатой фиктивной области лежат вне круга, и более точное

$$D_h'' = \{x \mid x \in \omega_h, (x_{1i} - r_0)^2 + (x_{2j} - r_0)^2 \leq (r_0 - h/2)^2\},$$

где  $h = h_1 = h_2$  — шаг квадратной сетки.

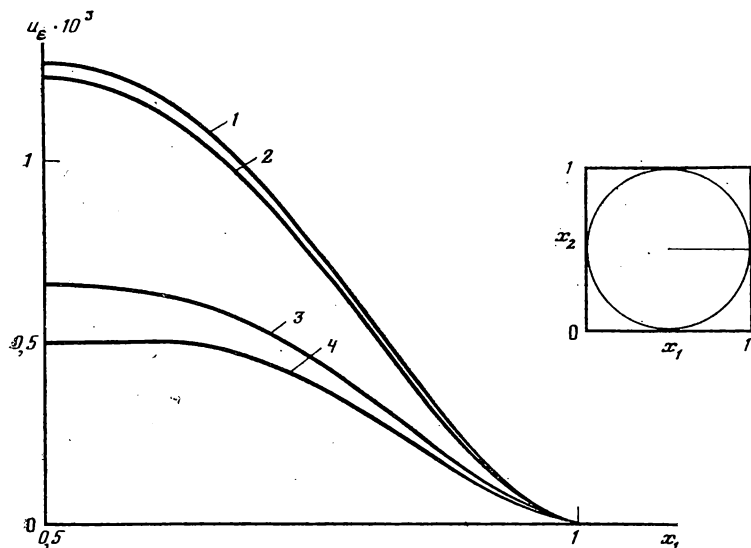


Рис. 33. Зависимость приближенного решения от параметра штрафа ( $\varepsilon^{-2} = \sigma^{-2}$ ): 1 —  $\varepsilon^{-2} = 0$ ; 2 —  $10^2$ ; 3 —  $10^4$ ; 4 —  $\varepsilon^{-2} > 10^6$

Рис. 33 иллюстрирует влияние штрафа, причем  $\sigma = \varepsilon$  и  $a = -5 \cdot 10^{-4}$ . Здесь приведено решение в сечении  $x_2 = 0,5$ . Аналогичные данные в диагональном сечении приведены на рис. 34. Видно, что при  $\sigma^{-2} = \varepsilon^{-2} > 10^6$  увеличение штрафа не приводит к заметному изменению решения.

#### 4.2. Другие примеры расчетов

При задании на границе прямоугольной пластины условий  $u(x) = 0$ ,  $\Delta u = 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ ,

которые соответствуют свободно опертому краю, также можно воспользоваться описанным ранее вычислительным алгоритмом с реализацией метода штрафа на основе попеременно-треугольного итерационного метода. Пример такого расчета с ограничениями (4.1) при  $f(x) = -1$  приведен на рис. 35. Здесь использованы достаточно малые  $\varepsilon$  ( $\varepsilon^{-2} > 10^6$ ), расчет выполнен на

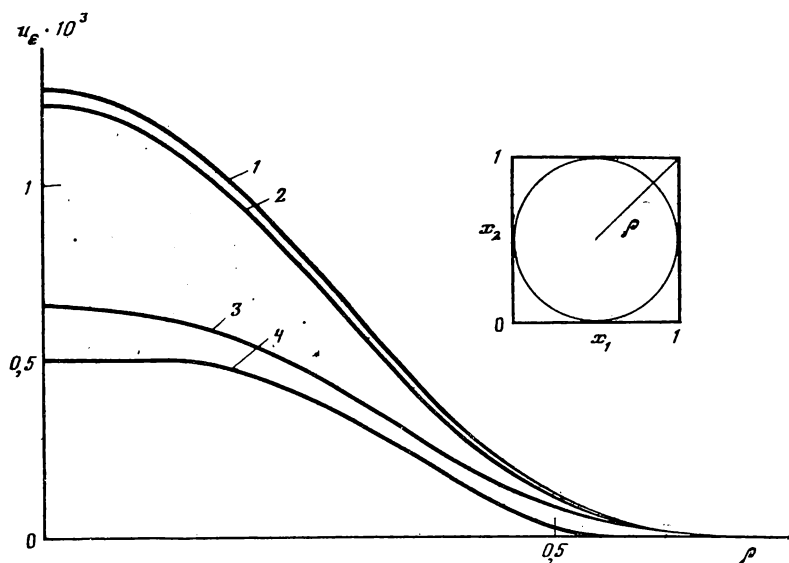


Рис. 34. Приближенное решение в диагональном сечении при  $\epsilon^{-2} = \sigma^{-2}$ :  
 1 —  $\epsilon^{-2} = 0$ ; 2 —  $10^2$ ; 3 —  $10^4$ ; 4 —  $\epsilon^{-2} > 10^6$

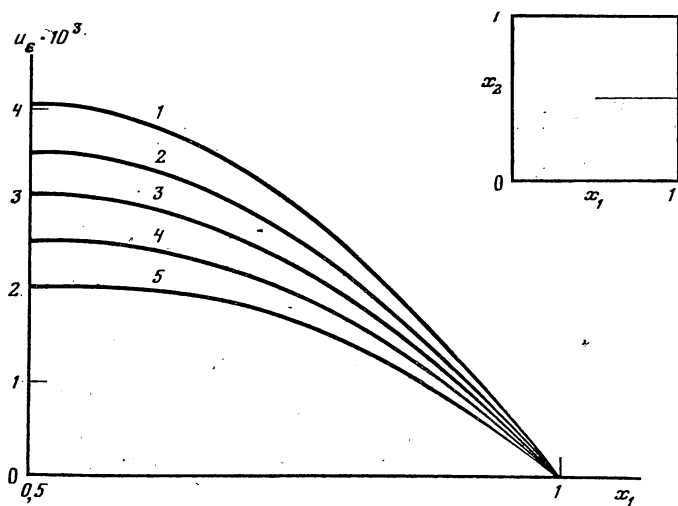


Рис. 35. Решение задачи о квадратной пластине со свободно опирающимися краями: 1 — без ограничений, 2 —  $a = 3.5 \cdot 10^{-3}$ , 3 —  $3 \cdot 10^{-3}$ , 4 —  $2.5 \cdot 10^{-3}$ , 5 —  $2 \cdot 10^{-3}$

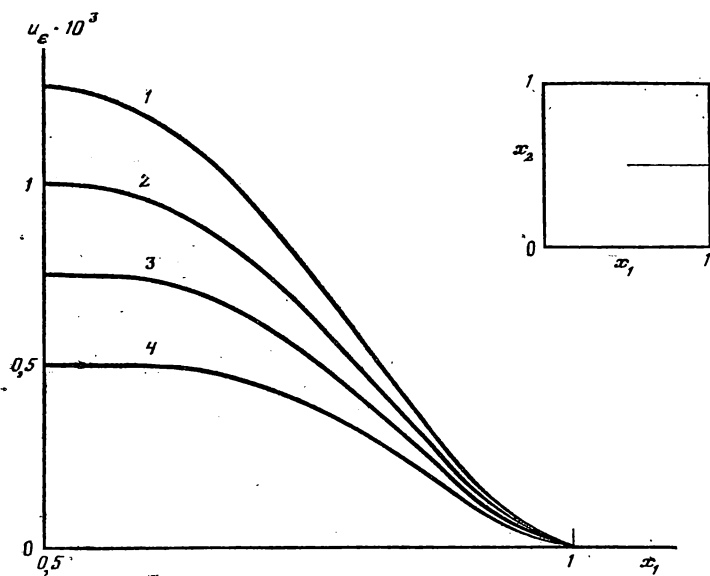


Рис. 36. Пластина с защемленными краями: 1 — без ограничений, 2 —  $10^{-3}$ , 3 —  $7,5 \cdot 10^{-4}$ , 4 —  $5 \cdot 10^{-4}$

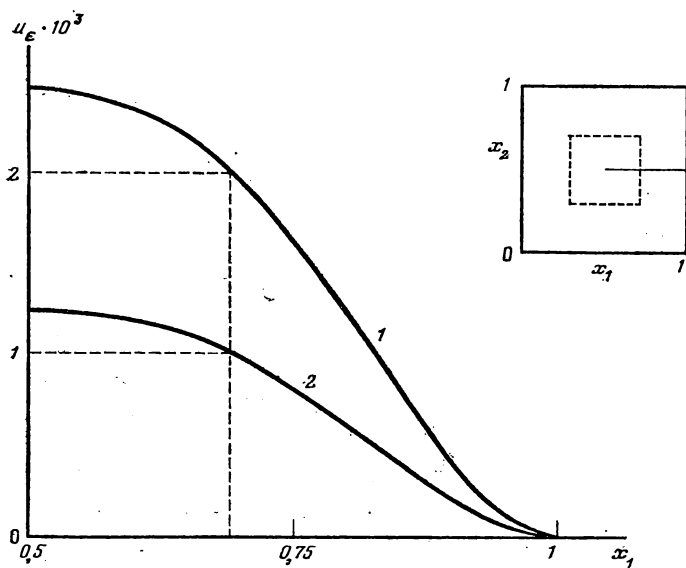


Рис. 37. Пластина с заданным по периметру внутреннего квадрата смещением: 1 —  $a = 2 \cdot 10^{-3}$ , 2 —  $10^{-3}$

стеке  $(30 \times 30)$ . Для сравнения на рис. 36 приведены данные расчета прямоугольной пластины с жестко защемленным краем, когда на  $\partial\Omega$  заданы условия первого рода (2.2).

Отметим также возможность расчета пластин с более общими, чем (4.1), ограничениями. Это могут быть условия вида  $u(x) \geq g(x)$ , где функция  $g(x)$  определяет границу препятствия, и т. п. Приведем пример частично опертой пластины. Предположим, что вместо (4.1) задано условие  $u(x) = u_P(x)$ ,  $x \in P$ , где  $P \subset \Omega$ . На рис. 37 представлены результаты расчетов, когда  $P$  — граница квадрата, целиком лежащего в единичном квадрате  $\Omega$ . Следует отметить, что указанные примеры носят чисто иллюстративный характер. Они лишь отчасти отражают возможности разработанного метода для решения прикладных задач теории упругости. Аналогичные расчеты можно найти в книге [62], где вычислительный алгоритм строится на основе метода конечных элементов.

## ГЛАВА VI

### НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

#### § 1. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

##### 1.1. Постановка некорректных задач со свободной границей

Выше мы рассмотрели краевые задачи со свободной границей, которые характеризуются тем, что часть границы области (или вся граница) неизвестна, но на ней заданы дополнительные условия. Так, при исследовании задач для эллиптических уравнений второго порядка на свободной границе задано два граничных условия. Такая ситуация характерна для корректных задач с неизвестной границей, причем задачи эти всегда нелинейны. Здесь мы остановимся на некорректных задачах со свободной границей. Общим моментом для задач такого класса является то, что мы имеем дополнительное условие не на неизвестной, а на заданной части границы области.

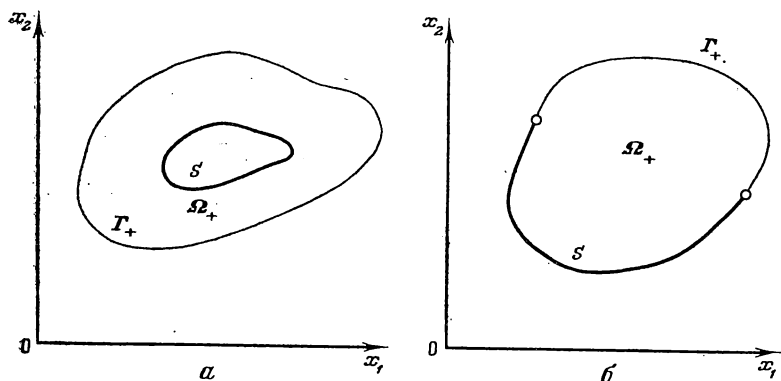


Рис. 38. Задача Коши для двухсвязной (а) и односвязной (б) области  $\Omega_+$ :  $\Gamma_+$  — заданная часть границы,  $S$  — неизвестная граница

Рассмотрим пример (рис. 38). Пусть для определенности  $\Gamma_+$  — известная часть границы, а  $S$  — неизвестная. Внутри области  $\Omega_+$  решение  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0, \quad x \in S. \quad (1.1)$$

На известной части границы заданы два условия

$$u(x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma_+. \quad (1.2)$$

Сама неизвестная граница может определяться из различных дополнительных условий. В § 1 гл. I рассмотрен пример из геофизики, в котором на  $S$  выполнено однородное условие второго рода. В данном случае предположим, что

$$S = \{x | u(x) = u^*\},$$

т. е. на  $S$  выполнено условие первого рода

$$u(x) = u^*, \quad x \in S. \quad (1.3)$$

Таким образом, мы пришли к задаче с начальными данными (1.2) для уравнения Лапласа. Неизвестная граница  $S$  восстанавливается после решения (1.1), (1.2) по условию (1.3).

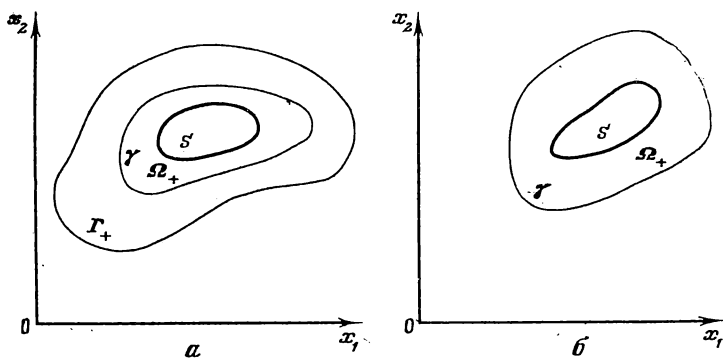


Рис. 39. Задача со свободной границей при продолжении решений краевых задач в ограниченной (а) и неограниченной (б) области

Другой класс некорректных задач со свободной границей характеризуется тем, что дополнительное условие ставится на некотором внутреннем многообразии меньшей размерности. Например, ставятся условия на  $\gamma$  (рис. 39). В простейшем случае решается уравнение (1.1) с дополнительными условиями

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_+, \quad (1.4)$$

$$u(x) = \psi(x), \quad x \in \gamma, \quad (1.5)$$

после чего определяется граница  $S$ . О таких задачах говорят как о задачах продолжения решений эллиптических краевых

задач. Действительно, для задачи (1.1), (1.4), (1.5) внутри области между  $\Gamma_+$  и  $\gamma$  мы имеем краевую задачу, решение которой необходимо продолжить в область, прилегающую к  $\gamma$ , вплоть до  $S$ .

Эти задачи принадлежат к классу условно корректных (см. цитированную ранее литературу [115—118], а также работы [208—211]). Остановимся на некоторых методах приближенного решения таких задач. В нашем рассмотрении будем придерживаться алгоритмической направленности, оставляя без внимания важные теоретические вопросы обоснования используемых методов. Изложение этих вопросов в рамках настоящей работы привело бы к значительной перегрузке ее материалом, который далеко уводит от основного содержания. В то же самое время не хотелось оставлять эту проблематику без внимания.

Задачи продолжения решений эллиптических уравнений и задачи Коши встречаются во многих практически важных случаях. Мы уже отмечали задачи разведочной геофизики, причем речь идет не только о задачах электроразведки, но и гравиметрической и магниторазведки [212, 213]. В качестве примера будет рассмотрена (§ 5) задача определения границы плазменного шнура по данным магнитных измерений вне плазмы. Очень интересная задача Коши со свободной границей обсуждается в работе [214] при рассмотрении задачи о формировании течения с заданным распределением скорости при помощи пористой перемычки. Аналогичные задачи могут быть поставлены и при рассмотрении многих проблем синтеза в теплофизике, электродинамике и т. д.

## 1.2. Метод интегральных уравнений

При решении многих некорректных задач для эллиптических уравнений могут быть использованы интегральные уравнения. Поясним сказанное на примерах задач, которые приведены выше. Метод интегральных уравнений удобно использовать для задачи продолжения решений эллиптических уравнений, когда  $\Omega_+$  — неограниченная область. На рис. 39 показано решение уравнения (1.1) вне  $\gamma$  с некоторыми условиями на бесконечности вместо (1.4). Например, рассмотрим задачу

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega_+, \quad (1.6)$$

$$u(x) = 0, \quad |x| = \infty, \quad (1.7)$$

с условиями (1.5) на  $\gamma$ , где  $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

Особенность поставленной задачи заключается в том, что область  $\Omega_+$  не ограничена. Можно предложить следующий подход к решению таких задач. Выберем контур  $C$ , который априори лежит внутри  $S$ . Будем искать решение задачи (1.5) — (1.7) в виде потенциала простого слоя с носителем на контуре  $C$ , т. е.

$$u(x) = \int_C v(x') G(x, x') d\tau. \quad (1.8)$$

Для определения плотности используем условие на  $\gamma$ , которое приводит к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_C v(x') G(x, x') d\tau = \psi(x), \quad x \in \gamma. \quad (1.9)$$

Аналогично можно поступить и в задаче (1.1), (1.4), (1.5) в ограниченной области, а также при решении задачи Коши (1.1), (1.2). В этом случае решение ищется в виде суммы двух потенциалов с носителями на двух контурах  $C_1$  и  $C_2$ , между которыми лежит  $\Gamma_+$  и  $S$ .

Такой подход к решению некорректных задач для эллиптических уравнений давно используется в геофизике (см., например, [215, 216]). Интересно, что идея представления решения в виде потенциала с особенностью вне расчетной области применяется и для решения обычных граничных задач, т. е. в условиях, когда в задаче нужно найти решение только вне  $\gamma$ . Этот метод рассматривается в [217], его обоснование дается в работах [218, 219].

### 1.3. Метод регуляризации

В настоящее время основным методом решения некорректных задач является метод регуляризации Тихонова [220]. Применительно к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода он подробно изложен в [117, 221], где имеются также программы для ЭВМ. Запишем (1.8) в виде операторного уравнения первого рода

$$Ay = f$$

с неизвестной функцией  $y$  и заданной правой частью  $f$ . В методе регуляризации 0-го порядка приближенное решение  $y_\alpha$  определяется из уравнения

$$A^*Ay_\alpha + \alpha y_\alpha = A^*f_\alpha,$$

где параметр регуляризации  $\alpha$  согласован с погрешностью в правой части

$$\|f_0 - f\| \leq \delta,$$

т. е. в задании функции  $\psi(x)$  в (1.9).

Очень важным вопросом при приближенном решении некорректных задач является выбор параметра регуляризации. В вычислительной практике получили широкое распространение методы невязки, обобщенной невязки [115, 117, 222]. Обширный материал по этому вопросу приведен в обзорной работе [223]. Следует отметить, что проблема решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода освещается в большом числе работ и проработана достаточно глубоко.

## § 2. МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ

### 2.1. Постановка задачи

Для решения задачи Коши для эллиптических уравнений часто применяются разностные методы. В [118] рассматривается метод квазиобращения, обоснование которого для параболических задач содержится в работе [224]. Применение его к эллиптическим задачам приводит к значительным трудностям вычислительного характера, так как приходится решать задачу с сильно изменяющимися коэффициентами для эллиптического уравнения более высокого порядка, чем исходное.

В ряде работ (см., например, [225, 226]) при решении некорректной задачи Коши для уравнения Лапласа в части полуполосы используется эквивалентная система уравнений Коши — Римана, для которой применяются обычные разностные методы. В работах [227, 228] предложен метод обращения переменных, который используется для решения плоской задачи Коши для эллиптических уравнений и систем. Он тесно примыкает к рассмотренному в гл. III методу решения краевых задач, и суть его состоит в отображении исходной нерегулярной области на регулярную. Такой метод может быть применен в двух вариантах. В первом из них он используется для прямого решения исходной задачи, во втором — для построения ортогональной сетки, на которой уже решается рассматриваемая задача. Остановимся на первом варианте применения метода обращения переменных. Предлагаемый вычислительный алгоритм в значительной степени строится эвристически на базе проведенного вычислительного эксперимента и отчасти на результатах работ [225—228].

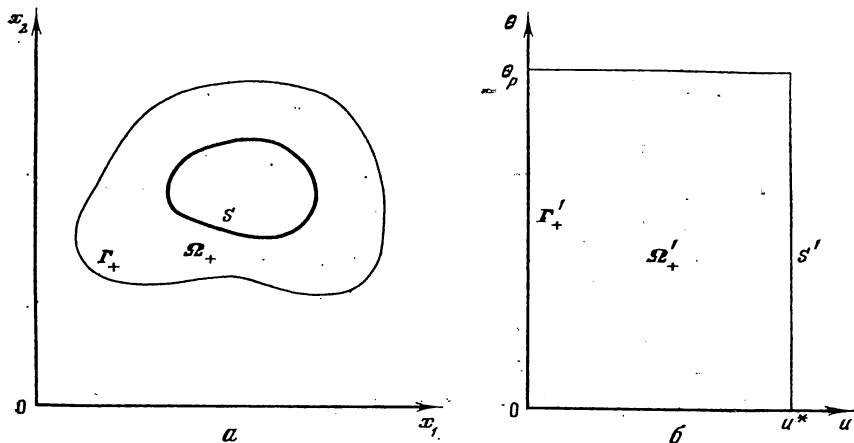


Рис. 40. Задача Коши со свободной границей в исходных (а) и обращенных (б) переменных

Рассмотрим следующую модельную задачу Коши в двухсвязной области  $\Omega_+$  (рис. 40):

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega_+, \quad (2.1)$$

$$u(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma_+, \quad (2.2)$$

$$u(x) = u^*, \quad x \in S. \quad (2.3)$$

В задаче (2.1)–(2.3) положим  $u^* > 0$ , и поэтому  $\psi(x) < 0$ .

## 2.2. Обращение переменных

Для решения задачи (2.1)–(2.3) применим метод обращения переменных (гл. III). От переменных  $(x_1, x_2)$  перейдем к новым независимым переменным  $(u, v)$ , где  $v$  — сопряженная к  $u$  гармоническая функция, т. е.  $\eta = u$  и  $\theta = v$ , причем  $\eta$  и  $\theta$  ортогональны. Для  $u(x)$  и  $v(x)$  справедливы уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}. \quad (2.4)$$

В новых переменных перейдем от (2.4) к следующим уравнениям для  $x_\alpha(u, v)$ ,  $\alpha = 1, 2$ :

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u} = -\frac{\partial x_1}{\partial v}. \quad (2.5)$$

Система уравнений (2.5) используется для численного решения исходной задачи (2.1) — (2.3). Остановимся на начальных условиях для этой системы. Контур  $\Gamma_+$  в новой системе координат  $(u, v)$  является частью координатной линии  $u=0$ , на которой заданы координаты  $x_1$  и  $x_2$ . Однако сами зависимости  $x_\alpha(0, v)$ ,  $\alpha=1, 2$ , от  $v$  неизвестны, так как на  $\Gamma_+$  значение  $v(x)$  не определено.

Функцию  $v(x)$  на  $\Gamma_+$  можно найти, используя начальные условия (2.2). Обозначим через  $\partial/\partial\tau$  производную вдоль касательной к  $\Gamma_+$ . Справедливо следующее соотношение на  $\Gamma_+$ :

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad x \in \Gamma_+. \quad (2.6)$$

С точностью до постоянной из (2.6) и (2.2) следует

$$v(x) = \int_{x_0}^x \psi(x) d\tau, \quad x \in \Gamma_+, \quad x_0 \in \Gamma_+. \quad (2.7)$$

С помощью (2.7) задаем граничные значения для неизвестных  $x_\alpha(u, v)$ ,  $\alpha=1, 2$ :

$$x_\alpha(0, v) = x_\alpha^0(v), \quad \alpha=1, 2. \quad (2.8)$$

По переменной  $v$  ставятся естественные условия периодичности

$$x_\alpha(u, v + v_p) = x_\alpha(u, v), \quad \alpha=1, 2, \quad v_p = \max_{x \in \Gamma_+} v(x). \quad (2.9)$$

Таким образом, в обращенных переменных приходим к задаче Коши для системы уравнений Коши — Римана (2.5), (2.8), (2.9). Она решается в прямоугольнике

$$\Omega'_+ = \{(u, v) \mid 0 < u < u^*, 0 < v < v_p\},$$

причем  $x_\alpha(u^*, v)$ ,  $\alpha=1, 2$ , определяют неизвестную границу  $S$ .

### 2.3. Разностная задача

Остановимся кратко на вопросах численной реализации метода обращения переменных. Запишем уравнение (2.5) в виде

$$\frac{\partial z}{\partial u} + i \frac{\partial z}{\partial v} = 0, \quad (2.10)$$

где  $z = x_1 + ix_2$ . Уравнение (2.10) дополним условиями, вытекающими из начальных условий (2.8) для  $x_\alpha(u, v)$ ,  $\alpha=1, 2$ ,

$$z(0, v) = z_0(v). \quad (2.11)$$

Кроме того, условия периодичности (2.9) дают

$$z(u, v + v_p) = z(u, v). \quad (2.12)$$

Пусть задана в общем случае неравномерная сетка по переменным  $u$  и  $v$

$$\begin{aligned} \omega_h = \{ & (u, v) = (u_k, v_j), \quad u_k = u_{k-1} + h_k, \quad u_0 = 0, \quad u_{N_1} = u^*, \\ & v_j = v_{j-1} + \tau_j, \quad v_0 = 0, \quad v_{N_2} = v_p, \quad k = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = \\ & = 1, 2, \dots, N_2 - 1 \}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $z_j^k$ ,  $x_{1j}^k$ ,  $x_{2j}^k$  соответствующие сеточные функции в узле  $(u_k, v_j)$ .

Для аппроксимации (2.10) удобно использовать явные разностные схемы. Простейшая из них при  $h_k = h = \text{const}$  и  $\tau_j = \tau = \text{const}$  имеет вид

$$\frac{z_j^{k+1} - z_j^k}{h} + i \frac{z_{j+1}^k - z_{j-1}^k}{2\tau} = 0$$

и порядок аппроксимации  $O(h + \tau^2)$ . Схема

$$\frac{z_j^{k+1} - z_j^k}{h} + i \frac{z_{j+1}^k - z_{j-1}^k}{2\tau} = -\frac{h}{2\tau^2} (z_{j+1}^k - 2z_j^k + z_{j-1}^k) \quad (2.13)$$

аппроксимирует (2.10) со вторым порядком как по  $u$ , так и по  $v$ . Исследование этих и других аналогичных схем можно найти в работах [225, 226].

Разностная схема типа (2.13) на неравномерной сетке записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{x_{1j}^{k+1} - x_{1j}^k}{h_{k+1}} &= \frac{1}{\tau_j \tau_{j+1} (\tau_j + \tau_{j+1})} (\tau_j^2 (x_{2,j+1}^k - x_{2j}^k) + \\ &+ \tau_{j+1}^2 (x_{2j}^k - x_{2,j-1}^k)) - \\ &- \frac{h_{k+1}}{(\tau_j + \tau_{j+1})} \left( \frac{1}{\tau_{j+1}} (x_{1,j+1}^k - x_{1j}^k) - \frac{1}{\tau_j} (x_{1j}^k - x_{1,j-1}^k) \right), \\ \frac{x_{2j}^{k+1} - x_{2j}^k}{h_{k+1}} &= -\frac{1}{\tau_j \tau_{j+1} (\tau_j + \tau_{j+1})} (\tau_j^2 (x_{1,j+1}^k - x_{1j}^k) + \\ &+ \tau_{j+1}^2 (x_{1j}^k - x_{1,j-1}^k)) - \\ &- \frac{h_{k+1}}{(\tau_j + \tau_{j+1})} \left( \frac{1}{\tau_{j+1}} (x_{2,j+1}^k - x_{2j}^k) - \frac{1}{\tau_j} (x_{2j}^k - x_{2,j-1}^k) \right). \end{aligned}$$

Шаг сетки по  $v$  получаем из аппроксимации (2.7). Например,

$$\tau_j = \frac{1}{2}(\psi_j + \psi_{j-1})((x_{1j}^0 - x_{1,j-1}^0)^2 + (x_{2j}^0 - x_{2,j-1}^0)^2)^{1/2},$$

где  $x_{aj}^0$ ,  $j=0, 1, \dots, N_2$ , — координаты точки границы  $\Gamma_+$ , которые являются начальными условиями для (2.5).

Примеры решения модельных задач типа (2.1)—(2.3) методом обращения переменных можно найти в [227, 228].

### § 3. МЕТОД КВАЗИОБРАЩЕНИЯ И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

#### 3.1. Постановка задачи

В данном разделе речь пойдет об использовании нового варианта метода квазиобращения, который предложен в работе [229], при решении задачи Коши для эллиптических уравнений в цилиндрических областях. Аналогичный подход при решении некорректных задач для эволюционных уравнений первого порядка (задача с обратным временем для уравнения теплопроводности) применялся ранее в [230].

Рассмотрим простейшую задачу рассматриваемого класса в  $n$ -мерном параллелепипеде  $\Omega = (0, l_1) \times \Omega_{n-1}$ ,

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad 0 < x_i < l_i, \quad i=1, 2, \dots, n\}.$$

Пусть  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Delta_{n-1} u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

и условиям

$$u(x) = \varphi(x'), \quad x_1 = 0, \quad x' = (x_2, x_3, \dots, x_n) \in \Omega_{n-1}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad (3.3)$$

а на боковых гранях положим

$$u(x) = 0, \quad x' \in \partial\Omega_{n-1}. \quad (3.4)$$

Для приближенного устойчивого решения задачи Коши (3.1)—(3.4) сначала рассмотрим подход с возмущением исходного уравнения. Методы такого класса относят к методам квазиобращения [118].

### 3.2. Метод квазиобращения

Попробуем заменить уравнение (3.1) «близким» ему так, чтобы задача для него была уже корректной, т. е. имелась непрерывная зависимость решения от начального условия. Обозначим приближенное решение через  $u_\alpha(x)$  и определим его из уравнения

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_1^2} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta_{n-1} u_\alpha + \Delta_{n-1} u_\alpha = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.5)$$

которое дополняется условиями (3.2) — (3.4).

Докажем для решения задачи (3.2) — (3.5) соответствующую оценку устойчивости. Пусть  $v_k(x')$  — собственные функции задачи

$$\Delta_{n-1} v + \lambda v = 0, \quad x' \in \Omega_{n-1}, \quad (3.6)$$

$$v(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega_{n-1}, \quad (3.7)$$

а  $\lambda_k$  — соответствующие собственные значения. Будем искать решение задачи (3.2) — (3.5) в виде разложения

$$u_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha(x_1) v_k(x'). \quad (3.8)$$

Подстановка (3.8) в (3.5) с учетом (3.2) — (3.4) приводит к задаче

$$(1 + \alpha \lambda_k) \frac{d^2 a_k^\alpha}{dx_1^2} - \lambda_k a_k^\alpha = 0, \quad (3.9)$$

$$a_k^\alpha(0) = \varphi_k, \quad \frac{da_k^\alpha}{dx_1}(0) = 0, \quad (3.10)$$

где  $\varphi_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , — коэффициенты разложения  $\varphi(x')$  в ряд по собственным функциям  $v_k(x')$ . Решение задачи (3.9), (3.10) имеет вид

$$a_k^\alpha(x') = \varphi_k \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k}} x_1 \right).$$

Отсюда получаем для  $u_\alpha(x)$  представление

$$u_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k}} x_1 \right) v_k(x'). \quad (3.11)$$

Заметим, что исходная задача (3.1)—(3.4) приводит к следующему выражению:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_k} x_1) v_k(x'). \quad (3.12)$$

Из (3.12) видно, что неустойчивость решения задачи Коши (3.1)—(3.4) обуславливается преобладающим ростом со временем высших гармоник.

Для решения задачи (3.2)—(3.5) справедлива следующая оценка в  $L_2(\Omega_{n-1})$ :

$$\|u_\alpha(x)\| \leq \exp\left(\frac{x_1}{\sqrt{\alpha}}\right) \|\varphi(x')\|. \quad (3.13)$$

Действительно, из (3.11) в силу равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(x)\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_k}{1+\alpha\lambda_k}} x_1\right) \leq \\ &\leq \exp\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} x_1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 = \exp\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} x_1\right) \|\varphi(x')\|^2. \end{aligned}$$

Здесь использовано условие  $\alpha > 0$  и то, что для задачи (3.6), (3.7)  $\lambda_k > 0$ .

При решении задач с возмущенным начальным условием, т. е. когда вместо точного начального условия  $\varphi(x')$  задано приближенное  $\varphi_\delta(x')$ , причем

$$\|\varphi_\delta(x') - \varphi(x')\| \leq \delta,$$

необходимо согласовывать параметр регуляризации  $\alpha$  в уравнении (3.5) с погрешностью  $\delta$  во входных данных. Для доказательства сходимости приближенного решения  $u_\alpha(x)$  к точному при  $\delta \rightarrow 0$  и  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  условия непрерывной зависимости (оценки (3.13)) недостаточно. Нужно показать, при каких априорных предположениях на решение и при каком выборе зависимости  $\alpha(\delta)$  такая сходимость имеется. Этот вопрос исследуется по схеме работ [224, 231] (см. также гл. V в [115]). Аналогичное замечание касается и метода нелокального возмущения начальных условий, который рассматривается в следующем параграфе.

### 3.3. Разностная задача и устойчивость разностных схем

Введем в  $\Omega_{n-1}$  равномерную сетку  $\bar{\omega}_h$  с шагами  $h_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ :

$$\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_k = \{x' = (i_2 h_2, i_3 h_3, \dots, i_n h_n),$$

$$i_k = 0, 1, \dots, N_k, \quad N_k h_k = l_k, \quad k = 2, 3, \dots, n\}.$$

Для того чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с эволюционной задачей, шаг сетки по переменной  $x_1$  обозначим через  $\tau$ , причем

$$\bar{\omega}_\tau = \{x_1 = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, N_1, \quad N_1 \tau = l_1\}.$$

Аппроксимируем оператор  $\Delta_{n-1}$  на сетке  $\omega_h$  обычным образом:

$$\Lambda y = \sum_{k=2}^n \Lambda_k y = \sum_{k=2}^n y_{x_k} x_k, \quad x' \in \omega_h.$$

Введём оператор  $A_0 = A_0^* > 0$  такой, что

$$A_0 y = -\Lambda y, \quad x' \in \omega_h, \quad y(x') = 0, \quad x' \in \gamma_h. \quad (3.14)$$

Для  $A_0$  справедливо представление

$$A_0 = \sum_{k=2}^n A_k, \quad A_k = A_k^* > 0, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (3.15)$$

На сетке  $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$  рассмотрим сначала схему с весами для исходной задачи (3.1)–(3.4). Имеем

$$\frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} - A_0(\sigma_1 y^{j+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y^j + \sigma_2 y^{j-1}) = 0 \quad (3.16)$$

с заданными  $y^0, y^1$ .

Для разностного решения неустойчивых задач имеет смысл говорить о  $\rho$ -устойчивости соответствующих разностных схем при  $\rho > 1$ , чтобы приближенно передавать поведение точного решения при возрастании  $x_1(t)$ . В этом случае для разностного решения выполнены оценки типа

$$\|y^{j+1}\|_D = (Dy^{j+1}, y^{j+1}) \leq \rho \|y^j\|_D,$$

где  $D = D^* > 0$ . Основная цель при построении  $\rho$ -устойчивых разностных схем состоит в том, чтобы контролировать рост решения исходя из априорной информации о решении, фильтровать высокие (паразитные) гармоники.

Исследование соответствующих разностных схем будем проводить на основе общей теории устойчивости А. А. Самарского [124, 232]. Другие подходы при решении некорректных задач разностными методами рассматриваются в работах [233, 234].

Для исследования схем типа (3.16) запишем их в канонической форме трехслойных разностных схем [124]:

$$B \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} + R(y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}) + Ay^j = 0. \quad (3.17)$$

Напомним следующий основной результат о  $\rho$ -устойчивости схем (3.17) [232, 235]. При самосопряженных и постоянных операторах  $A$ ,  $B$  и  $R$  схема (3.17)  $\rho$ -устойчива с  $\rho > 0$  при выполнении следующих операторных неравенств:

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A \geq 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho + 1)^2 R - \rho A \geq 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{\rho^2 + 1}{2\tau} B + (\rho^2 - 1) R \geq 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho^2 + 1) R > 0, \quad (3.21)$$

причем условия (3.18) — (3.21) являются необходимыми и достаточными. Схема с весами (3.16) записывается в канонической форме с операторами

$$A = -A_0, \quad B = -\tau(\sigma_1 - \sigma_2)A_0, \quad (3.22)$$

$$R = \frac{1}{\tau^2} E - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)A_0 \quad (3.23)$$

в силу того, что

$$\begin{aligned} & \sigma_1 y^{j+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y^j + \sigma_2 y^{j-1} = y^j + \\ & + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)(y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)(y^{j+1} - y^{j-1}). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ . Нам понадобится следующая оценка для оператора  $A_0$ :

$$A_0 \leq \lambda_h \max E, \quad (3.24)$$

где  $\lambda_h \max = O(h^{-2})$ , а  $h^2 = h_2^2 + h_3^2 + \dots + h_n^2$  [124].

Покажем, что схема (3.16) при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$   $\rho$ -устойчива с

$$\rho \approx 1 + \sqrt{\lambda_{h\max}} \tau. \quad (3.25)$$

В этом случае из (3.22), (3.23) следует

$$A = -A_0, \quad B = 0, \quad (3.26)$$

$$R = \frac{1}{\tau^2} E. \quad (3.27)$$

Неравенства (3.19) — (3.21) при  $\rho > 1$  очевидны. Выберем  $\rho$  так, чтобы было выполнено и неравенство (3.18), которое с учетом (3.26), (3.27) принимает вид

$$(\rho - 1)^2 \frac{E}{\tau^2} \geq \rho A_0.$$

Отсюда в силу (3.24)

$$\rho = 1 + \frac{1}{2} \lambda_{h\max} \tau^2 + \sqrt{\lambda_{h\max} \tau^2 + \frac{1}{4} \lambda_{h\max}^2 \tau^2},$$

поэтому справедливо (3.25) с точностью  $O(\tau^2)$ .

Доказанное утверждение обуславливает регуляризующие свойства разностных методов при решении некорректных эволюционных задач. В данном случае аналогом параметра регуляризации является  $h$  (сравните с (3.13)). Разностными методами можно решать задачу Коши (3.1) — (3.4) при  $l_1 = O(h)$ , причем  $h$  выбирается исходя из уровня погрешности во входных данных.

Рассмотрим теперь схему (3.16) с  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . При  $\sigma = -\alpha/\tau^2$  она аппроксимирует уравнение (3.5) со вторым порядком. Эта схема имеет канонический вид (3.17) при

$$A = -A_0, \quad B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E + \frac{\alpha}{\tau^2} A_0. \quad (3.28)$$

Легко устанавливается  $\rho$ -устойчивость схемы (3.17), (3.28) с

$$\rho \approx 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tau. \quad (3.29)$$

### 3.4. Экономичные схемы для многомерных задач

При решении многомерных задач большое значение имеют экономичные схемы [124]. Заметим, что схема (3.17), (3.28) таким свойством не обладает, так как на верхнем слое приходится обращать сеточный оператор  $E + \alpha A_0$ . Используем для построения экономичных схем свойства (3.14), (3.15) оператора  $A_0$ . Для решения (3.1) возьмем факторизованную схему вида

$$\prod_{k=2}^n (E + \alpha A_k) \frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} - A_0 y^j = 0, \quad (3.30)$$

которая обобщает (3.17), (3.28). Можно записать схему (3.28) следующим образом:

$$(E + \alpha A_0) \frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} - A_0 y^j = 0.$$

В каноническом виде (3.17) для схемы (3.30) получим

$$A = -A_0, \quad B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} \prod_{k=2}^n (E + \alpha A_k). \quad (3.31)$$

Условия (3.18)—(3.21)  $\rho$ -устойчивости схемы (3.17), (3.31) легко проверяются, причем для  $\rho$  получим то же самое выражение (3.29).

## § 4. НЕЛОКАЛЬНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

### 4.1. Нелокальная эллиптическая задача

Методы квазиобращения, например вариант метода, разобранный выше, связаны с тем или иным возмущением исходного уравнения. В то же время зачастую с погрешностью задаются лишь начальные условия. Рассмотрим некоторые регуляризующие алгоритмы решения некорректной задачи Коши для эллиптических уравнений, особенность которых как раз и заключается в том, что само уравнение не возмущается, а лишь подправляются начальные условия. Такой подход обсуждается в работе [236] и применяется для численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа в [237], где имеется достаточно подробный числовой материал.

Приближенное решение задачи (3.1)—(3.4) определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_1^2} + \Delta_{n-1} u_\alpha = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.1)$$

с условиями

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1}(x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad (4.2)$$

$$u_\alpha(x) = 0, \quad x' \in \partial\Omega_{n-1}. \quad (4.3)$$

Начальное условие (3.2) заменим на нелокальное условие вида

$$u_\alpha(0, x') + \alpha u_\alpha(h, x') = \varphi(x'), \quad x' \in \Omega_{n-1}. \quad (4.4)$$

Таким образом, приходим к эллиптической задаче с нелокальными условиями на границе. Впервые такой класс задач рассмотрен в работе [238], более подробное изложение имеется в книге [239]. Операторные уравнения с условиями типа (4.4) исследуются в [240]. При приближенном решении некорректных задач для эволюционных уравнений нелокальные условия

применяются в [241, 242]. Задачи с нелокальными условиями для дифференциальных уравнений с частными производными рассматриваются также в [243].

Покажем устойчивость приближенного решения (4.1)—(4.4). Для этого снова используем метод разделения переменных. Легко показать, что для нелокальной задачи (4.1)—(4.4) представление, аналогичное (3.11), имеет вид

$$u_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_k} x_1)}{1 + \alpha \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_k} l_1)} v_k(x'). \quad (4.5)$$

При  $\alpha > 0$  в коэффициентах разложения точного решения появляются стабилизирующие множители

$$\gamma_k = (1 + \alpha \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_k} l_1))^{-1}.$$

Из (4.5) нетрудно получить оценку устойчивости в  $L_2(\Omega_{n-1})$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha}(x)\| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k^2 \operatorname{ch}^2(\sqrt{\lambda_k} x_1)}{(1 + \alpha \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_k} l_1))^2} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k^2}{\alpha^2} \frac{\operatorname{ch}^2(\sqrt{\lambda_k} x_1)}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{\lambda_k} l_1)} \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k^2, \end{aligned}$$

поэтому

$$\|u_{\alpha}(x)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\varphi(x')\|. \quad (4.6)$$

В отличие от (3.13) в оценке метода квазиобращения (4.6) нет зависимости от  $x_1$ .

#### 4.2. Численная реализация метода

Для решения соответствующего разностного аналога задачи с нелокальным условием можно применить метод разделения переменных [119]. Использование быстрого преобразования Фурье по переменным  $x'$  приводит к необходимости решения линейной системы уравнений специального вида [236]. Для такой задачи можно применить специальный вариант метода прогонки, использующий идею окаймления [119]. Более подробно этот алгоритм описан в работах [236, 244, 245].

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$b_0 y_1 - c_0 y_0 = -f_0, \quad (4.7)$$

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \quad (4.8)$$

$$y_0 + \alpha y_N = -f_N, \quad (4.9)$$

где последнее уравнение обусловлено нелокальным условием типа (4.4). Будем искать решение  $y_i$  системы (4.7)–(4.9) в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i=0, 1, \dots, N-1. \quad (4.10)$$

Коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  определяются из подстановки представления (4.10) в (4.7), (4.8), что дает формулы правой прогонки

$$\alpha_{i+1} = b_i / (c_i - \alpha_i a_i), \quad \alpha_1 = b_0 / c_0, \quad (4.11)$$

$$\beta_{i+1} = (f_i + a_i \beta_i) / (c_i - \alpha_i a_i), \quad \beta_1 = f_0 / c_0, \quad i=1, 2, \dots, N-1. \quad (4.12)$$

Далее необходимо определить  $y_N$ . Чтобы воспользоваться связью (4.9), выразим  $y_i$  через  $y_N$  с помощью рекуррентной формулы

$$y_i = p_i y_N + q_i, \quad i=0, 1, \dots, N. \quad (4.13)$$

С учетом (4.10) соотношение (4.13) приводит к следующим выражениям для коэффициентов  $p_i$ ,  $q_i$ :

$$p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1}, \quad p_N = 1, \quad (4.14)$$

$$q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad q_N = 0, \quad i=N-1, N-2, \dots, 0, \quad (4.15)$$

где  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  определяются в (4.11), (4.12). Подстановка выражений (4.13) в нелокальное условие (4.9) дает выражение для  $y_N$ :

$$y_N = -(f_N + q_0) / (\alpha + p_0). \quad (4.16)$$

После нахождения  $y_N$  по (4.14)–(4.16) совершается обратная прогонка (4.10) для определения всех  $y_i$ ,  $i=0, 1, \dots, N-1$ .

### 4.3. Продолжение решений краевых задач

Рассмотрим возможность использования метода нелокального возмущения граничных условий для приближенного решения задачи продолжения решений краевых задач для эллиптических уравнений. Для этого рассмотрим задачу в полуполосе

$\Omega = (-\infty, l_1) \times \Omega_{n-1}$ , в которой  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Delta_{n-1} u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.17)$$

и условиям

$$u(0, x') = \varphi(x'), \quad x' \in \Omega_{n-1}, \quad (4.18)$$

$$u(-\infty, x') = 0, \quad x' \in \Omega_{n-1}, \quad (4.19)$$

$$u(x) = 0, \quad x' \in \partial\Omega_{n-1}. \quad (4.20)$$

Решение задачи Дирихле при  $-\infty < x_1 < 0$  необходимо продолжить в область  $0 < x < l_1$ .

Простейшая нелокальная регуляризация некорректной задачи (4.17)–(4.20) состоит в том, что вместо (4.18) рассматривается условие

$$u_\alpha(0, x') + \alpha u_\alpha(l_1, x') = \varphi(x'), \quad x' \in \Omega_{n-1}, \quad (4.21)$$

а  $u_\alpha(x)$  удовлетворяет в  $\Omega$  уравнению (4.17) и условию на бесконечности (4.19). Для приближенного решения  $u_\alpha(x)$  имеем следующее представление:

$$u_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k \exp(\sqrt{\lambda_k} x_1)}{1 + \alpha \exp(\sqrt{\lambda_k} l_1)} v_k(x'). \quad (4.22)$$

Из (4.22) легко получаем оценку устойчивости решения задачи (4.17), (4.19)–(4.21) по начальным данным (4.6) во всей рассматриваемой области  $\Omega$ .

Поставим в соответствие исходной задаче (4.17)–(4.20) следующую регуляризованную задачу оптимального управления [115, 118, 246]. Определим  $u_\alpha(x)$  как решение задачи

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_1^2} + \Delta_{n-1} u_\alpha = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.23)$$

$$u_\alpha(l^*, x') = v(x'), \quad x' \in \Omega_{n-1}, \quad (4.24)$$

$$u_\alpha(-\infty, x') = 0, \quad x' \in \Omega_{n-1}, \quad (4.25)$$

$$u_\alpha(x) = 0, \quad x' \in \partial\Omega_{n-1}, \quad (4.26)$$

где управление  $v(x)$  определяется из минимума функционала

$$J_\alpha(v) = \int_{\Omega_{n-1}} (u_\alpha(0, x') - \varphi(x'))^2 dx' + \alpha \int_{\Omega_{n-1}} v^2 dx'. \quad (4.27)$$

Нетрудно убедиться, что решение этой задачи оптимального управления  $u_\alpha(x)$  представляется формулой

$$u_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k \exp(\sqrt{\lambda_k} x_1)}{1 + \alpha \exp(2\sqrt{\lambda_k} l^*)} v_k(x'). \quad (4.28)$$

Сравнивая (4.28) и (4.22), видим, что решение нелокальной задачи (4.17), (4.19)—(4.21) совпадает с решением задачи оптимального управления (4.23)—(4.27) при  $l_1 = 2l^*$ . Аналогичная ситуация имеет место и при выборе сглаживающего функционала в (4.27) более общего вида.

Для задачи (4.23)—(4.27) легко обосновываются regularizing свойства такого метода при выборе параметра регуляризации  $\alpha$  по невязке. В силу установленной связи между нелокальной задачей и задачей оптимального управления последнее замечание касается и решения задачи (4.17), (4.19)—(4.21).

## § 5. ПРИМЕР 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА ПО ДАННЫМ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

### 5.1. Постановка задачи

При математическом моделировании поведения высокотемпературной плазмы в установках с магнитным удержанием типа токамак и стелларатор [75] большое внимание уделяется задачам МГД-равновесия (см. § 1 гл. I). Расширение возможностей современных диагностических средств, увеличение точности измерений в сочетании с хорошо развитыми вычислительными методами решения некорректных задач [115] позволяет поставить вопрос о разработке алгоритмов решения обратных задач МГД-равновесия [247, 248]. В настоящее время наиболее продвинулись исследования по определению границы плазменного шнура по данным магнитных измерений. В более важной задаче продолжения полей внутрь плазменного шнура [247] получены лишь первые результаты [89, 249].

Для решения задачи определения неизвестной границы плазменного шнура в работах [89, 247] применяются конечно-разностные алгоритмы. Ряд работ (см., например, [250, 251]) посвящен решению соответствующей задачи Коши для однородного уравнения равновесия методом разделения переменных. Здесь задача продолжения магнитного поля до границы плазмы решается в двух основных постановках: при удержании идеально проводящим кожухом и при использовании сторонних кольцевых токов.

Рассматриваются аксиально-симметричные конфигурации, характерные для токамака (рис. 41). В первом случае (рис. 41, а) плазменный шнур  $\Omega_-$  с неизвестной границей  $S$  удерживается в равновесии поверхностными токами, наведенными на идеально проводящем кожухе  $\Gamma_+$ . В мультипольном токамаке (рис. 41, б) он находится в магнитном поле заданных

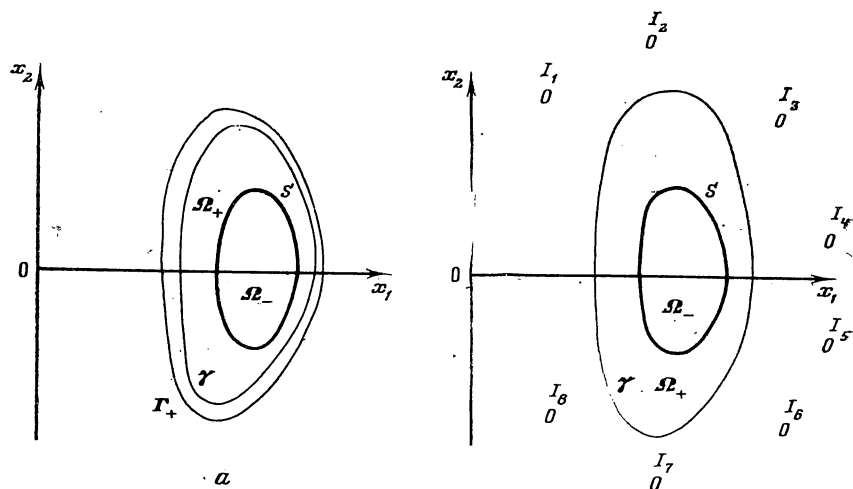


Рис. 41. Задача определения границы плазменного шнура в токамаке с кожухом (а) и при удержании внешним магнитным полем (б)

кольцевых токов  $I_k$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ . Будем считать, что на некотором контуре  $\gamma$ , охватывающем плазменный шнур  $\Omega_-$ , измеряется магнитное поле. В системе с кожухом положим  $\gamma = \Gamma_+$ , что приводит к необходимости решения следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega_+, \quad (5.1)$$

$$u(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma_+. \quad (5.2)$$

Неизвестная граница плазменного шнура определяется дополнительными условиями удержаний. При условии касания плазменного шнура заданной точки  $x^* = (x^*_1, x^*_2)$   $S$  определяется из условия

$$u(x) = u^* = u(x^*), \quad x \in S. \quad (5.3)$$

В задаче с удержанием сторонними токами удобно выделить заданное внешнее поле. Положим

$$u(x) = u_e(x) + u_i(x), \quad (5.4)$$

где

$$u_e^*(x) = \sum_{k=1}^k I_k G(x, x_k), \quad (5.5)$$

а функция

$$G(x, x') = \frac{\sqrt{x_1 x_1'}}{\pi t} \left( \left( 1 - \frac{t^2}{2} \right) K(t) - E(t) \right)$$

определяет поле единичного кольцевого витка  $x'$  в точке  $x$  [73]. Здесь

$$t^2 = \frac{4x_1 x_1'}{(x_1 + x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2},$$

а  $K(t)$ ,  $E(t)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Для собственного поля плазменного витка  $u_i(x)$  получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{x_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.6)$$

которое справедливо всюду вне плазменного шнура. Оно дополняется условиями на контуре наблюдения  $\gamma$ , например

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = \psi(x), \quad x \in \gamma, \quad (5.7)$$

соответствующими заданию на  $\gamma$  касательной составляющей поперечного магнитного поля. Для  $u(x)$  задаются условия

$$u(0, x_2) = 0, \quad u(x) = 0, \quad |x| = \infty. \quad (5.8)$$

Таким образом, в задаче с удержанием кожухом мы приходим к задаче Коши для эллиптического уравнения (5.1) — (5.3), которая решается ниже методом обращения переменных. Проблема определения границы плазменного шнура в мультипольном токамаке сводится к решению задачи продолжения (5.3) — (5.8). Численное решение последней проводилось с использованием метода интегральных уравнений, изложенного кратко в § 1.

## 5.2 Решение задачи определения границ в системе с кожухом

Рассмотрим некоторые примеры модельных расчетов по решению задачи Коши (5.1)–(5.3) методом обращения переменных. Функция

$$u(x) = \frac{4}{(b^2 - a^2)} ((b^2 - x_1^2)(x_1^2 - a^2) - 4\sigma^2 x_1^2 x_2^2) + u^* \quad (5.9)$$

определяет равновесную конфигурацию [74] с плотностью продольного электрического тока (п. 1.6 гл. I)

$$f_1(u) = \frac{32}{(b^2 - a^2)} (1 + \sigma^2), \quad f_2(u) = 0.$$

Область  $\Omega_-$ , занятая плазмой, определяется условием  $u > u^*$ , причем из (5.9) следует, что  $\max_{x \in \Omega_-} u = 1 + u^*$ . Граница плазмы

дается уравнением  $u(x) = u^*$ .

Вычислительный эксперимент строился по следующей схеме. Сначала по известному решению (5.9) продолжим  $u(x)$  в вакуумную область  $\Omega_+$  до некоторого  $u(x) = \text{const}$ , например  $u(x) = u_c$ ,  $x \in C$ . Затем, используя данные на  $\Gamma_+ = C$  в качестве начальных для задачи типа (5.1)–(5.3), продолжим  $u(x)$  с  $\Gamma_+$  вплоть до  $u(x) = u^*$ . Таким образом, задача продолжения равновесного поля решается двукратно: сначала в одну, а затем в другую сторону. Величина отклонения полученного контура в результате решения двух задач Коши от исходного  $S$  является наглядной характеристикой точности метода.

Рассматривалась равновесная конфигурация ИНТОРА [252], которая характеризуется следующими параметрами равновесия:  $a=3$ ,  $b=5$ ,  $\sigma=1.5$ . На рис. 42 приведены контуры  $C$  для  $u^* - u_c = 0,5$ ;  $0,75$  при применении вычислительного алгоритма, описанного в § 2, и сетки  $(50 \times 50)$ . Здесь погрешность во входных данных определяется лишь погрешностями аппроксимации. При решении конкретных задач со значительным уровнем погрешностей во входных данных рекомендуется предварительно сглаживать входные данные. С этой целью мы использовали сглаживающие сплайны [253].

## 5.3. Определение границы в мультипольном токамаке

Для иллюстрации возможностей вычислительного алгоритма продолжения полей в системе с заданным магнитным полем при интерпретации данных измерений в ИНТОРЕ проводился квазиреальный эксперимент. Численно решалась прямая задача равновесия с заданными распределением продольного тока и

внешним магнитным полем [254, 255]. После этого определялось равновесное поле в фиксированных точках контура наблюдения, которое случайным образом возмущалось. Затем с этими данными решалась задача продолжения вплоть до  $u(x) = u^*$ . Величина отклонения расчетного контура  $u(x) = u^*$  от границы плазменного шнура, как и в предыдущем примере, характеризует точность метода.

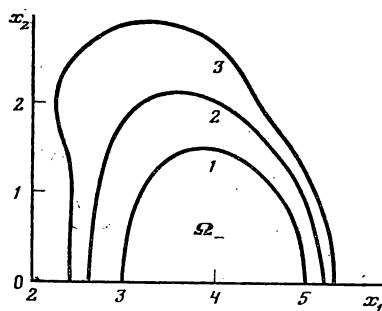
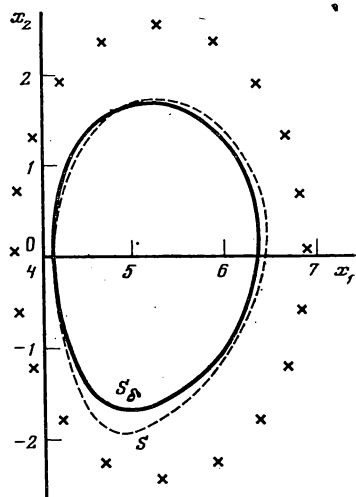
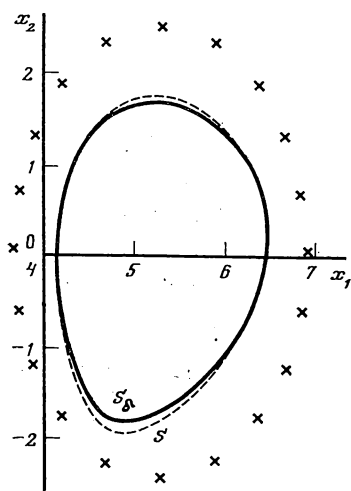


Рис. 42. Задача Коши для уравнения равновесия: 1 — граница плазменного шнура  $S$ , где  $u = u^*$ , 2 — контур, где  $u = u^* - 0,5$ , 3 — где  $u = u^* - 0,75$

Рис. 43. Восстановление границы плазменного шнура при погрешности измерений 2,5%:  $S$  — точная,  $S_0$  — восстановленная граница плазменного шнура

Рис. 44. Восстановление границы плазмы при погрешности 10%



На рис. 43 представлены результаты расчетов для погрешности во входных данных в 2,5%, отмечены точки наблюдения. Пример расчета при погрешности 10% приведен на рис. 44. Отметим, что увеличение количества точек наблюдения в два раза практически не повлияло на точность восстановления границы плазменного шнура.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман А. Дифференциальные уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
2. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
4. Авдонин Н. А. Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинанте, 1980.
5. Connon J. R., Hill C. D. Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation//J. Math. Mech. 1967, V. 17, N 1. P. 1—19.
6. Мейерманов А. М. О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений//Матем. сб. 1980. Т. 112(154), № 2(6). С. 170—192.
7. Fridman A. The Stefan problem in several space variables//Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 133, N 1. P. 51—87.
8. Бородин М. А.: О разрешимости двухфазной квазистационарной задачи Стефана // Докл. АН УССР. 1982. Т. А., № 2. С. 3—5.
9. Данилюк И. И. О вариационном подходе к квазистационарной задаче Стефана//Дифференциальные и интегральные уравнения краевой задачи. Тбилиси, 1979. С. 75—88.
10. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана//ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816—827.
11. Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана//ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 828—840.
12. Rogers I. S. W., Berger A. E., Ciment M. The alternating phase truncation method for numerical solution of a Stefan problem//SIAM J. Numer. Anal. 1979. V. 16, N 4. P. 569—587.
13. Meyer G. H. Multidimensional Stefan problems//SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10, N 3. P. 552—558.
14. White R. E. A numerical solution of the enthalpy formulation of the Stefan problem//SIAM J. Numer. Anal. 1982. V. 19, N 6. P. 1158—1172.
15. Васильев Ф. П. О методе прямых для решения однофазной задачи типа Стефана//ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 1. С. 64—78.
16. Бачелис Р. Д., Меламед В. Г., Шляйтер Д. Б. Решение задач типа Стефана методом прямых//ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 3. С. 585—595.
17. Будак Б. М., Гольдман Н. Л., Успенский А. Б. Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана//Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 4. С. 735—738.
18. Будак Б. М., Успенский А. Б. Разностный метод с выпрямлением фронтов для решения задач типа Стефана//ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 6. С. 1299—1315.
19. Бакирова О. И., Фрязинов И. В. Метод совместного решения задачи Стефана и уравнений Навье—Стокса. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, № 103.
20. Jamet P., Bonnerot R. Numerical computation of the free boundary for the twodimensional Stefan problem by spacetime finite elements//J. Comp. Phys. 1977. V. 25. P. 163—181.
21. Lynch D. R. Unified approach to simulation of deforming elements with application to phase change problems//J. Comp. Phys. 1982. V. 47, N 3. P. 387—411.
22. Рыкалин Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951.
23. Флемингс М. Процессы затвердевания. М.: Мир, 1977.
24. Ратников Д. Г. Бестигельная зонная плавка. М.: Металлургия, 1976.
25. Пфанн В. Зонная плавка. М.: Мир, 1970.

26. Ладиков Ю. П., Ткаченко В. Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах. М.: Наука, 1983.
27. Ефимов В. А. Разливка и кристаллизация стали. М.: Металлургия, 1976.
28. Китаев Е. М. Затвердевание стальных слитков. М.: Металлургия, 1982.
29. Тихонов А. Н., Швидковский Е. Г. К теории непрерывного слитка//ЖТФ. 1947. Т. 17, № 2. С. 161—176.
30. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
31. Биргоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.
32. Лаврентьев М. А., Красовский Ю. П., Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М., Шабат А. Б. Математические вопросы гидродинамики жидкости со свободными поверхностями//ЖПМ и ТФ. 1963. № 4. С. 3—16.
33. Гуревич М. И. Теория течений со свободными поверхностями//Итоги науки. Гидромеханика, т. 5. М.: ВИНТИ, 1971. С. 32—114.
34. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
35. Пухначев В. В. Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнений Навье—Стокса//ЖПМ и ТФ. 1972. № 3. С. 91—102.
36. Солонников В. А. Разрешимость задачи о плоском движении тяжелой вязкой несжимаемой капиллярной жидкости, частично заполняющей некоторый сосуд//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, № 1. С. 203—236.
37. Bemelmans J. Free boundary problems for the Navier—Stokes equations//Asterisque. 1984. N 118. P. 115—123.
38. Кузнецов Б. Г., Шепеленко В. Н., Яненко Н. Н. Расчет формы каверны в поле тяготения с учетом поверхностного натяжения//Изв. СО АН СССР. Сер. техн. 1967. Т. 3, № 13. С. 58—61.
39. Волков П. К., Кузнецов Б. Г., Христов Х. И. Метод численного решения задач динамики тяжелой идеальной жидкости со свободной поверхностью//Численные методы механики сплошной среды. 1980. Т. 11, № 2. С. 22—33.
40. Данилюк И. И., Тарасенко Л. Н. Об одном методе численного решения осесимметричных течений со свободной границей//Укр. матем. ж. 1971. Т. 23, № 6. С. 723—732.
41. Тарасенко Л. Н. О численном решении задачи об осесимметричных течениях со свободной границей//ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13, № 4. С. 1064—1068.
42. Prosperetti A., Jacobs J. W. A numerical method for potential flows with a free surface//J. Comp. Phys. 1983. V. 51, N 3. P. 365—386.
43. Константинов Г. А., Якимов Ю. А. Численный метод решения нестационарных задач гидродинамики идеальной жидкости со свободными поверхностями//Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. 1969. № 4. С. 162—167.
44. Нгуен-Лам. Численный метод решения некоторых задач теории движения тяжелой жидкости//ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7, № 2. С. 357—366.
45. Рочу П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
46. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
47. Ривкинд В. Я. Стационарное движение слабдеформируемой капли в потоке вязкой жидкости//Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, вып. 69. 1977. С. 157—170.
48. Васенина М. И., Ривкинд В. Я. Численный эксперимент в задачах со свободной границей в криволинейных координатах//Вест. ЛГУ. 1984. № 19. С. 77—79.
49. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
50. Байокки К., Мандженес Э. О задачах со свободной границей, связанных с течением жидкости через пористые материалы//УМН. 1974. Т. 29, № 2. С. 50—69.
51. Bayocchy C. Probleme à frontière libre en hydraulique//C. R. Acad. Sci. Paris. 1974. V. 278. P. 1201—1204.
52. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

53. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
54. Шаманский В. Е. Численное решение задач неустановившейся фильтрации со свободными поверхностями жидкости//ЖВМ и МФ. 1970. Т. 10. № 2. С. 505—514.
55. Alt H. W. Numerical solution of steady—state porous flow free boundary problems//Numer. Math. 1980. V. 36, N 1. P. 73—98.
56. Thatcher R. W., Askew S. L. A complementary solution to the dam problem//IMA J. Numer. Anal. 1982. V. 2, N 2. P. 229—239.
57. Котляр Л. М., Сковцов Э. В. Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с предельным градиентом. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978.
58. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
59. Ляшко А. Д., Карчевский М. М. Разностные методы решения нелинейных задач теории фильтрации//Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1983. № 7. С. 28—45.
60. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.
61. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
62. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольтер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
63. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.
64. Вабишевич П. Н. Численное решение вариационных эллиптических неравенств четвертого порядка//ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 9. С. 1312—1319.
65. Вайнельт В. Об использовании разностных схем при решении краевых задач для дифференциальных неравенств//ЖВМ и МФ. 1978. Т. 18, № 3. С. 642—652.
66. Вабишевич П. Н. О решении задачи со свободной границей для эллиптических уравнений//ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 5. С. 1109—1117.
67. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
68. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956.
69. Григоренко Я. М., Мухоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1983.
70. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983.
71. Галин Л. А. Упруго-пластические задачи. М.: Наука, 1984.
72. Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций//ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 6. С. 947—961.
73. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
74. Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле//Вопросы теории плазмы, вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963. С. 92—131.
75. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
76. Mukhovatov V. S., Shafranov V. D. Plasma equilibrium in a tokamak//Nucl. Fus. 1971. V. 11. P. 605—633.
77. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. Равновесие плазмы с током в тороидальных системах//Вопросы теории плазмы, вып. 11. М.: Энергоиздат, 1982. С. 118—235.
78. Bauer F., Betancourt O., Garabedian P. A computational methods in plasma physics. New York: Springer Verlag, 1978.
79. Lacner K. Computation of ideal MHD equilibria//Comp. Phys. Comm. 1976. V. 12, N 1. P. 33—44.
80. Макнамара Б. Равновесие плазмы в магнитном поле//Управляемый термоядерный синтез. М.: Мир, 1980. С. 224—267.

81. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М. Численные методы решения задач теории МГД-равновесия//Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 72—83.
82. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. Метод обращения переменных в задачах МГД-равновесия//Физика плазмы. 1978. Т. 4, № 5. С. 995—1000.
83. Хаит В. Д. Вариационный метод приближенного решения задач МГД-равновесия плазмы в токамаке//Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 4. С. 871—873.
84. Jardin S. C. Self-consistent solution of the plasma transport equations in a axisymmetric toroidal systems//J. Comp. Phys. 1981. V. 43, N 1. P. 31—60.
85. Hicks H. R., Dory R. A., Holmes J. A. Inverse plasma equilibria//Comp. Phys. Reports. 1984. V. 1, N 7, 8. P. 373—388.
86. Демидов А. С. Об одной задаче со свободной границей в теории равновесной плазмы//Труды семинара имени И. Г. Петровского, вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 65—82.
87. Demidov A. S. The form of study plasma subject to the skin effect in a tokamak with no-circular cross-section//Nucl. Fus. 1975. V. 15, N 5. P. 765—768.
88. Steffen S. A numerical method the evalution of an equilibrium configuration of toroidal pinch//J. Comp. Phys. 1978. V. 27, N 2. P. 180—191.
89. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Пошехонов Ю. Ю. Численное решение прямой и обратной задачи МГД-равновесия с поверхностным током//ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20, № 2. С. 491—500.
90. Capriz G., Cimatti G. Free boundary problems in the theory of hudrodynamic lubrication: a survey//Free boundary problems: theory and applications. Research Notes in Math., 78—79. 1983. P. 613—618.
91. Cimatti G. On a problem of the theory of lubrication governed by a variational inequality//Appl. Math. Optim. 1977. V. 3. P. 227—242.
92. McGeough J. A. Free and moving boundary problems in electrochemical machining and flame fronts//Free boundary problems: theory and applications. Research Notes in Math., 78—79, 1983. P. 472—480.
93. Elliott C. M. On a variational inequiality foimulation of an electrochemical machining moving boundary problem and its approximation by the finite element method//J. Inst. Math. Appl. 1980. V. 25. P. 121—131.
94. Болдасов В. С., Волков Б. И., Свешников А. Г., Семашко Н. Н. К определению формы плазменного эмиттера и ускоренного пучка в ионно-оптической системе//Докл. АН СССР. 1974. Т. 218, № 5. С. 1049—1051.
95. Свешников А. Г., Болдасов В. С., Волков Б. И., Якунин С. А. Математическое моделирование систем формирования и фокусирования мощных потоков заряженных частиц//Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 273—291.
96. Вабищевич П. Н., Васенко С. А., Лихарев К. К., Семенов В. К. Распределение магнитного поля в двумерных джозефсоновских переходах//ЖЭТФ. 1984. Т. 86, № 3. С. 1132—1141.
97. Вабищевич П. Н., Васенко С. А., Семенов В. К. Численное решение задач со свободной границей в теории джозефсоновских переходов//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1985. Т. 26, № 1. С. 24—29.
98. Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. Киев. 1982.
99. Wilton D. S., Solomon A. D., Boggs P. T. Moving boundary problems. New York; Academic Press, 1978.
100. Albrech J., Collatz L., Hoffmann K. H. Numerishe Behandlung der Freier Randwertproblemen. Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1981.
101. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.
102. Ладженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
103. Ярковой О. И. О стационарном состоянии аксиально-симметричной системы заряженных частиц//ЖТФ, 1962, Т. 32. С. 1285—1290.

104. Будням С., Жидков Е. П., Иванов И. Н., Перельштейн Э. А. Стационарное состояние электронного кольца во внешнем магнитном поле//ЖВМ и МФ. 1971. Т. 11, № 4. С. 1043—1047.
105. Будням С., Жидков Е. П. Расчет стационарного электронного кольца во внешнем магнитном поле. Препринт ОИЯИ, 1973, P11—7495.
106. Buckmaster J., Crowley A. B. The fluid mechanics of flame tips//J. Fluid Mech. 1983. V. 131. P. 341—361.
107. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
108. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
109. Эббот М. Б. Вычислительная гидравлика. Гидравлика открытого потока. М.: Энергоатомиздат, 1983.
110. Чугаев Р. Р. Гидравлика. Л.: Энергоатомиздат, 1982.
111. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
112. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.
113. Заборовский А. И. Электроразведка. М.: Гостоптехиздат, 1963.
114. Электроразведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1980.
115. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
116. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
117. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
118. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
119. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
120. Орtega Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
121. Самарский А. А., Капорин И. Е., Кучеров А. Б., Николаев Е. С. Некоторые современные методы решения сеточных уравнений//Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1983. № 7. С. 3—12.
122. Кузнецов Ю. А. Вычислительные методы в подпространствах//Вычислительные процессы и системы, вып. 2. М.: Наука, 1985. С. 265—350.
123. Kadalbajoo M. K., Bharadwai K. K. Fast elliptic solvers—an overview//Appl. Math. and Comput. 1984. V. 14, N 4. P. 331—355.
124. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
125. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
126. Олейник О. А. Об одном методе решения общей задачи Стефана//Докл. АН СССР. 1960. Т. 135, № 5. С. 1054—1057.
127. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978.
128. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
129. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
130. Вабищевич П. Н., Габов С. А. Угловой потенциал для решения эллиптических уравнений с переменными коэффициентами//ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 3. С. 652—664.
131. Вабищевич П. Н., Пулатов П. А. Экономичные разностные методы решения прямых задач гравитационной и магниторазведки//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. № 10. С. 68—76.
132. Лазаров Р. Д., Мокин Ю. И. О вычислении логарифмического потенциала//Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 1. С. 27—30.
133. Mayo A. The fast solution of Poisson's and the biharmonic equations on irregular regions//SIAM J. Numer. Anal. 1984. V. 21, N 2. P. 285—299.

134. Вабищевич П. Н., Вабищевич Т. Н. Об одном методе численного решения задачи Стефана//Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1983. № 4. С. 17—22.
135. Вабищевич П. Н., Вабищевич Т. Н. Численное решение квазистационарной осесимметричной задачи Стефана//ИФЖ. 1984. Т. 46, № 3. С. 506—512.
136. Чаплыгин С. А. Избранные труды. М.: Наука, 1976.
137. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.
138. Канторович Л. А., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
139. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
140. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
141. Ghil M., Balgovid R. A fast Cauchy—Riemann solver//Mathematics of Computation. 1979. V. 33, N 146. P. 585—635.
142. Годунов С. К., Прокопов Г. П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток//ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7, № 5. С. 1031—1059.
143. Chakravathy S., Anderson D. Numerical conformal mapping//Mathematics of computation. 1979. V. 33, N 147. P. 953—969.
144. Menikoff R., Zemach S. Methods for numerical conformal mapping//J. Comp. Phys. 1980. V. 36, N 3, P. 366—410.
145. Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial systems for numerical solution of partial differential equations. A review//J. Comp. Phys. 1982. V. 47, N 1, p. 1—108.
146. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Дроздов В. В. Об одном методе численного решения первой краевой задачи на плоскости для квазилинейных эллиптических уравнений//Докл. АН СССР. 1982. Т. 262, № 5. С. 1040—1043.
147. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Дроздов В. В. Квазиполярные потоковые координаты в задачах МГД-равновесия. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, № 112. 28 с.
148. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961.
149. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Дроздов В. В., Пошехонов Ю. Ю., Шафранов В. Д. О равновесных конфигурациях в компактных торах//Физика плазмы. 1981. Т. 7, № 5. С. 981—985.
150. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д. Винтовой пинч с обращенным шагом силовых линий//Физика плазмы. 1983. Т. 9, № 3. С. 484—494.
151. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М. Об одном методе решения задачи со свободной границей для эллиптических уравнений и систем//Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 6. С. 1342—1346.
152. Grank J., Ozis T. Numerical solution of a free boundary problem by interchanging dependent and independent variables//IMA, 1980. V. 26, N 1. P. 77—85.
153. Hui W., Tenti G. A new approach to study flows with free surface//ZAMP. 1982. V. 33, N 5. P. 569—589.
154. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Пистуневич В. И., Пошехонов Ю. Ю., Шафранов В. Д. Эволюция равновесия тороидального плазменного шнура в кожухе сложной формы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1978, № 119.
155. Betancourt O., Garabedian P. Equilibrium and stability code for a diffuse plasma//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1976. V. 73, N 4. P. 984—987.
156. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Дроздов В. В. Численное решение задач эволюции МГД-равновесия плазмы токамака в ортогональных потоковых координатах//Вопросы атомной науки и техники. Сер. Метод. и програм. числ. решения задач матем. физ., вып. 2(8), 1981. С. 22—32.

157. Zakharov L. E., Mikhailov M. I., Pistunovich V. I., Pustovitov V. D., Shafranov V. D., Vabishchevich P. N., Degtyarev L. M., Drozdov V. V., Poshekhonov Yu. Yu. Some problems of high  $\beta$  toroidal plasma equilibrium and stability//Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1980. Vol. 1. Vienna: IAEA. P. 313—328.
158. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.
159. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1980.
160. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
161. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
162. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
163. Шеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.
164. Численные методы условной оптимизации/Под ред. Ф. Гилл, У. Мюррей. М.: Мир, 1977.
165. Bensoussan A., Lions J. L. Applications des inequations variationnelles en controle stochastique. Paris: Dunod, 1978.
166. Лионс Ж. Некоторые математические проблемы, связанные с механикой деформируемых тел//Механика деформируемых твердых тел. Направления развития. М.: Мир, 1983. С. 8—21.
167. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
168. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
169. Самарский А. А. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений//ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4, № 3. С. 580—585.
170. Кучеров А. Б., Николаев Е. С. Попеременно-треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в прямоугольнике//ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 5. С. 1164—1174.
171. Кучеров А. Б., Николаев Е. С. Попеременно-треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в произвольной области//ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 3, с. 664—675.
172. Welnet W., Helmer G. Iterative Lösung spezieller nichtlinearer Differenzenschemata//Beitr. Numer. Math. 1979. V. 7. P. 139—158.
173. Вабищевич П. Н. Численное решение задачи МГД-равновесия в кожухе произвольной формы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1979, № 121, 19 с.
174. Самарский А. А., Фрязинов И. В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики//УМН. 1976. Т. 31, вып. 6 (192). С. 167—197.
175. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир. 1977.
176. Miller K. Numerical analogues to the Schwarz alternating procedure//Numer. Math. 1965. V. 7, N 2. P. 91—103.
177. Романова С. Е. О решении альтернирующим методом Шварца смешанной краевой задачи для разностного уравнения Лапласа на ступенчатых областях//Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 3. С. 536—539.
178. Польский Б. С. Об одном методе решения эллиптических разностных уравнений//ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21, № 1. С. 29—34.
179. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982.
180. Рвачев В. Л., Манько Г. П. Автоматизация программирования в краевых задачах. Киев: Наукова думка, 1983.
181. Саульев В. К. Об одном методе автоматизации решения краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах//Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 3. С. 497—500.
182. Саульев В. К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей//Сиб. матем. журн. 1963. Т. 4, № 4. С. 912—925.

183. Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А. Некоторые вопросы итерационных методов//Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, 1972. С. 4—20.
184. Капорин И. Е., Николаев Е. С. Метод фиктивных неизвестных — сопряженных направлений для разностных эллиптических задач с переменными коэффициентами//Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 7. С. 1202—1207.
185. Войцеховский С. А., Гаврилюк И. П., Макаров В. Л. О методе фиктивных областей для решения задач математической физики в областях сложной формы и его реализация. I.//Вычислительная и прикладная математика, № 51. Киев: Вища школа, 1983. С. 23—34.
186. Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А. О построении и исследовании однородных разностных схем//Матем. сб. 1982. Т. 117 (159), № 4. С. 469—480.
187. Самарский А. А. Исследование точности разностных схем для задач с обобщенными решениями//Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1984. С. 174—183.
188. Войцеховский С. А., Гаврилюк И. П., Макаров В. Л. О методе фиктивных областей для решения задач математической физики в областях сложной формы и его реализация. II.//Вычислительная и прикладная математика. № 52. Киев: Вища школа, 1984. С. 3—10.
189. Карпов В. Я., Корягин Д. А., Самарский А. А. Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической, физики//ЖВМ и МФ. 1978. Т. 18, № 2. С. 458—467.
190. Бугров А. Н. Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа//Труды V Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. II. Новосибирск, 1978. С. 24—36.
191. Копченков В. Д. Метод фиктивных областей для второй и третьей краевых задач//Труды МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 119—127.
192. Бугров А. Н. Итерационные схемы решения сеточных уравнений, возникающих в методе фиктивных областей//Численный анализ. Новосибирск, 1978. С. 10—23.
193. Вабищевич П. Н. Численное решение задачи стационарной фильтрации со свободной границей//Разностные методы математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 128—133.
194. Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода В. П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа, 1983.
195. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. А. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963.
196. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты. М.: Стройиздат, 1984.
197. Бугров А. Н. Метод фиктивных областей в задаче о поперечном изгибе тонкой пластины/Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, № 4. С. 45—58.
198. Кучеров А. Б., Николаев Е. С. Параллельные алгоритмы итерационных методов с факторизованным оператором для решения эллиптических краевых задач//Дифференц. уравнения, 1984. Т. 20, № 7. С. 1230—1237.
199. Коновалов А. Н., Яненко Н. Н. Некоторые вопросы модульного анализа и параллельного программирования для задач математической физики и механики сплошной среды//Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 200—207.
200. Приказчиков В. Г., Химич А. Н. Попеременно-треугольный метод вычисления главной частоты в колебаниях пластин//Труды V Всесоюзной конференции «Численные методы в механике сплошной среды». Т. 2. Новосибирск, 1978. С. 102—107.
201. Вабищевич П. Н. Численное решение краевых задач для эллиптических уравнений четвертого порядка//ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 8. С. 1196—1206.
202. Вабищевич П. Н., Вабищевич Т. Н. Численное решение стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости//Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 5. С. 852—860.

203. Дородницын А. А., Меллер Н. А. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье—Стокса//ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 2. С. 393—402.
204. Гловински Р., Пиронно О. О применении «квазипрямого» метода и итерационных методов к решению задачи Дирихле для бигармонического оператора при смешанной аппроксимации конечными элементами//Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. Новосибирск: Наука, 1978. С. 34—57.
205. Карчевский М. М. О некоторых методах решения первой краевой задачи для разностного бигармонического уравнения//ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23, № 5. С. 1088—1097.
206. Buzbee B. L., Dorr F. W. The direct solutions of the biharmonic equation on rectangular regions and the Poisson equation on irregular regions//SIAM J. Numer. Anal. 1974. V. 11. P. 753—763.
207. Bjostand P. Fast numerical solution of the biharmonic Dirichlet problem on rectangles//SIAM J. Numer. Anal. 1983. V. 20, N 1. P. 59—71.
208. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, СО АН СССР, 1962.
209. Лаврентьев М. М. О внутренних задачах для дифференциальных уравнений//Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1983. С. 19—22.
210. Недеялков И. П. О некоторых некорректных задачах теории потенциала и их приложения в разведочной геофизике. София: БАН, 1978.
211. Nedelkov I. P. Improper problems in computational physics//Comp. Phys. Comm. 1972. V. 4. P. 157—164.
212. Гравиразведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1981.
213. Магниторазведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1980.
214. Шерклифф Дж. Размышления нового редактора//Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 477—488.
215. Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Литвиненко О. И., Мелихов В. Р. О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 12. С. 30—48.
216. Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1984.
217. Аронов В. И. Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. М.: Недра, 1976.
218. Кочетов И. И., Рахматулина А. Х. Решение некоторых краевых задач для эллиптических уравнений с помощью интегральных уравнений I рода//Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 3. С. 532—534.
219. Кочетов И. И. Об одном методе решения внешних краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка//ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 3. С. 779—781.
220. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач//Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49—52.
221. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1978.
222. Морозов В. А. Линейные и нелинейные некорректные задачи//Математический анализ, т. II. М.: ВИНТИ, 1973. С. 129—178.
223. Тихонов А. Н., Морозов В. А. Методы регуляризации некорректно поставленных задач//Вычислительные методы и программирование. вып. 35. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 3—34.
224. Музылев Н. В. О методе квазиобращения//ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 3. С. 555—561.
225. Чудов Л. А. Разностные методы решения задачи Коши для уравнения Лапласа//Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 4. С. 798—801.
226. Чудов Л. А. Разностные схемы и некорректные задачи для уравнений с частными производными//Вычислительные методы и программирование, вып. 8. М.: Изд-во МГУ, 1967. С. 34—62.
227. Вабищевич П. Н. О решении задачи Коши для уравнения Лапласа в двухсвязной области//Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 6. С. 1257—1260.

228. Вабищевич П. Н. Численное решение задачи Коши для эллиптических уравнений и систем//Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1979. № 3. С. 3—10.
229. Вабищевич П. Н. Разностные методы решения некоторых некорректных задач//Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1984. № 8. С. 3—9.
230. Ewing R. The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations//SIAM J. Math. Anal. 1975. V. 6, N 2. P. 283—294.
231. Арсенин В. Я. Об одном способе приближенного решения интегральных уравнений первого рода типа свертки//Труды МИАН СССР. 1973. Т. 133. С. 33—51.
232. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
233. Тамме Э. Э. Об устойчивости разностных схем при решении некорректных задач методом квазиобращения//ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12, № 5. С. 1319—1325.
234. Бухгейм А. Л. Об устойчивости разностных схем для некорректных задач//Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 1. С. 26—28.
235. Самарский А. А. Об устойчивости трехслойных разностных схем//Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 5. С. 998—1001.
236. Вабищевич П. Н. О численном решении нелокальных эллиптических задач//Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1983. № 5. С. 13—19.
237. Вабищевич П. Н., Пулатов П. А. Об одном методе численного решения задачи Коши для эллиптических уравнений//Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1984. № 2. С. 3—8.
238. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач//Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739—740.
239. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
240. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.
241. Абдулкеримов Л. Ш. Регуляризация некорректной задачи Коши для эволюционных уравнений в банаховых пространствах//Учен. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 1974, № 1. С. 32—36.
242. Карасик Б. Г. Регуляризация некорректной задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка//Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-тех. и матем. наук. 1976. № 6. С. 9—14.
243. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984.
244. Фойгт В. Об одном варианте метода прогонки для систем со связанными граничными условиями//ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 1. С. 251—254.
245. Ионкин Н. И. О нахождении численного решения одной неклассической задачи//Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1979. № 1. С. 64—68.
246. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
247. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М. О численном решении обратной задачи МГД-равновесия. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1978, № 74, 16 с.
248. Brusati M., Christiansen J. P., Cordey J. C., Jarrett K., Lazzato E., Ross R. T. Analysis of magnetic measurements in tokamak//Comp. Phys. Report. 1984. V. 1, N 7—8. P. 345—372.
249. Вабищевич П. Н. Обратная задача восстановления правой части эллиптического уравнения и ее численное решение//Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 277—284.
250. Вабищевич П. Н., Гласко В. Б., Криксин Ю. А. О решении одной задачи Адамара с помощью регуляризирующего по Тихонову алгоритма//ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 6. С. 1462—1470.

251. Кузнецов Ю. К., Набока А. М. О нахождении граничной поверхности плазменной конфигурации в токамаке с помощью внешних магнитных измерений / Физика плазмы. 1981. Т. 7, № 4. С. 860—865.
252. INTOR. Phase Two. Vienna, IAEA, 1984.
253. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
254. Бесполуденников С. Г., Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Дроздов В. В., Пистунович В. И. Расчет полоидального магнитного поля в токамаке. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, № 139, 22 с.
255. Попов А. М., Сычугов Д. Ю. Равновесие и устойчивость тороидального плазменного шнура с дивертором // Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 32—37.

МОНОГРАФИЯ

**Петр Николаевич Вабишевич**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*

Редактор *О. В. Семененко*

Технический редактор *Г. Д. Колоскова*

ИБ № 2622

Сдано в набор 01.08.86

Подписано к печати 23.01.87.

Л-62027 Формат 60×90//16 Бумага тип. № 3

Гарнитура литературная. Высокая печать

Усл. печ. л. 10,5 Уч.-изд. л. 9,95

Тираж 3400 экз. Заказ № 457

Цена 1 р. 50 к. Изд. № 4342

Ордена «Знак Почета» издательство

Московского университета.

103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.

119899, Москва, Ленинские горы

**В 1987 ГОДУ  
В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ВЫХОДИТ КНИГА:**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫ-  
ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ:** Сборник / Под  
ред. А. Н. Тихонова, А. А. Самарского. — 17 л.

Сборник посвящен вопросам развития вычислительных методов и методов математического моделирования и их использованию при решении прямых и обратных задач электродинамики, геофизики, физики плазмы, газовой динамики. Приведены новые результаты по исследованию вопросов единственности обратных задач, развитию метода регуляризации и созданию устойчивых методов решения обратных задач; большой интерес представляют статьи по развитию вычислительных методов. Описываются методы решения антенных задач, расчета электронно-оптических систем, задач дифракции и излучения; содержится цикл работ по численному исследованию математических моделей физики плазмы, а также статьи, посвященные вычислительной газодинамике.

Для специалистов в области вычислительной математики и математической физики.

**В 1987 ГОДУ  
В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ВЫХОДИТ КНИГА:**

**Морозов В. А. МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗА-  
ЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ. — 13 л.**

В монографии представлено современное состояние теории и методов устойчивого приближенного решения основных классов некорректно поставленных задач. Книга отличается широтой охвата рассматриваемых математических проблем и единой методикой, основанной на строгом математическом языке функционального анализа. Найдены простые условия оптимальности и оптимальности по порядку регулярных методов решения широкого класса неустойчивых задач; рассмотрена проблема эффективного выбора параметра регуляризации как для совместных, так и для несовместных операторных уравнений. Изложение сопровождается примерами.

Для специалистов по вычислительной математике.

### ***УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!***

Основным магазином по распространению книг издательства Московского университета является книжный магазин № 110 «Университетская книжная лавка».

Обращаем Ваше внимание на то, что «Университетская книжная лавка» принимает предварительные заказы на издания, включенные в аннотированный тематический план выпуска, только от москвичей. Жители других городов могут оформить предварительный заказ в местных книжных магазинах.

Заказы на книги направляйте по адресам:

117296, Москва, Ломоносовский проспект, 18, магазин № 110 «Университетская книжная лавка» (для москвичей).

117169, Москва, ул. Кржижановского, 14, магазин № 93 «Книга — почтой» (для иногородних).



**Цена 1 р. 50 к.**